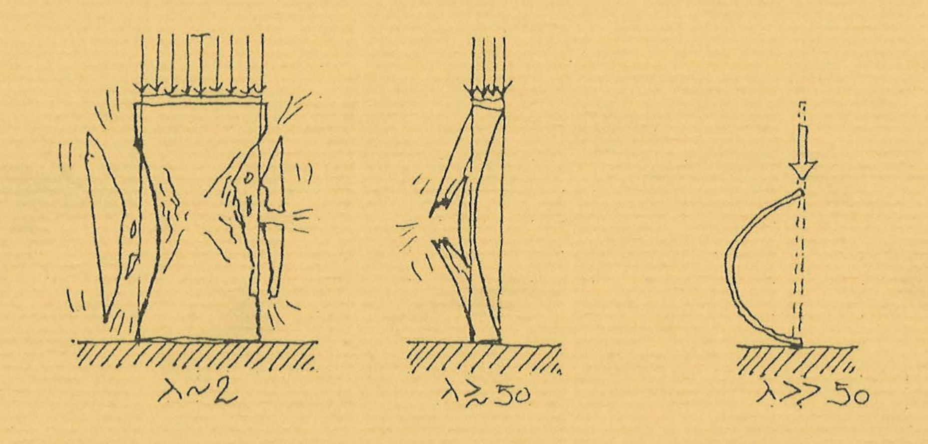
INTRODUCCIÓN A LA

ESTABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS COMPRIMIDAS

por

MARIANO VAZQUEZ ESPÍ



CUADERNOS DE *APOYO A LA DOCENCIA* DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

Introducción
a la
ESTABILIDAD DE LAS ESTRUCTURAS COMPRIMIDAS

Mariano Vázquez Espí

Profesor Titular
Departamento de Estructuras de Edificación
Escuela de Arquitectura de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Madrid, 1997.

Índice

Prefacio 3

1 Piezas comprimidas 5
- 1.1 Ensayo a compresión de piezas esbeltas. Arriostramientos 6
  - 1.1.1 Análisis con imperfecciones iniciales 9
    - *Ej. 1.1 Diseño de arriostramientos horizontales de acero* 13
- 1.2 Ensayo a compresión de piezas esbeltas. Resultados 14
  - 1.2.1 Comprobación de piezas 17
  - 1.2.2 Diseño de piezas 18
    - *Ej. 1.2 Cálculo de un pie derecho de madera* 19
    - *Ej. 1.3 Capacidad resistente de un pie derecho de madera* 20
    - *Ej. 1.4 Diseño de un pie derecho de madera* 23
    - *Ej. 1.5 Diseño de un soporte metálico* 23
    - *Ej. 1.6 Crítica de diseños* 24

2 Estructuras comprimidas 25
- 2.1 Arriostramientos de estructuras 25
- 2.2 Arriostramientos en diagonal 26
    - *Ej. 2.1 Diseño de arriostramiento de acero en diagonal* 29
    - *Ej. 2.2 Arriostramientos óptimos* 30
- 2.3 Arriostramiento de varios soportes 30
    - *Ej. 2.3 Diseño de los arriostramientos de un depósito* 34
    - *Ej. 2.4 Peritaje de la estabilidad de un depósito* 34
- 2.4 Soportes inclinados 35
- 2.5 Orden de los efectos de las acciones sobre las estructuras 37

Índice de figuras

I Estructuras traccionadas y comprimidas . . . 3

1.1 Ensayos de tracción y compresión . . . 6
1.2 Ensayo a compresión de piezas esbeltas . . . 7
1.3 Arriostramientos en el ensayo de compresión . . . 8
1.4 Equilibrio con desplome inicial . . . 10
1.5 Compresión: formas de rotura. . . . 14
1.6 Compresión: tipos de sección. . . . 15
1.7 Ensayo a compresión de piezas compuestas . . . 16
1.8 Pandeo de una pieza en una estructura arriostrada . . . 18

2.1 Arriostramiento de estructuras . . . 26
2.2 Arriostramientos en diagonal . . . 27
2.3 Diseño de arriostramientos en diagonal . . . 29
2.4 Arriostramientos de varios soportes . . . 31
2.5 Equilibrio de varios soportes con desplome . . . 31
2.6 Depósito arriostrado . . . 34
2.7 Soporte inclinado . . . 36
2.8 Arco inestable . . . 38

Prefacio

El presente texto se escribió como documento de apoyo a la asignatura *Mecánica de sólidos y sistemas estructurales* del Plan 96 de la Escuela de Madrid. Se trata de *una* continuación natural de mi *Equilibrio de sólidos deformables*.[1] En aquel texto se exploraban los conceptos fundamentales del diseño aplicados a estructuras tan sencillas que siempre se encontraban traccionadas, lo que permitió comprobar su estabilidad mediante simples argumentos geométricos y de sentido común. Aquí se trata de dilucidar si aquellos conceptos y métodos son también aplicables a las estructuras comprimidas, si es necesario modificarlos o si se requieren nuevas formulaciones.

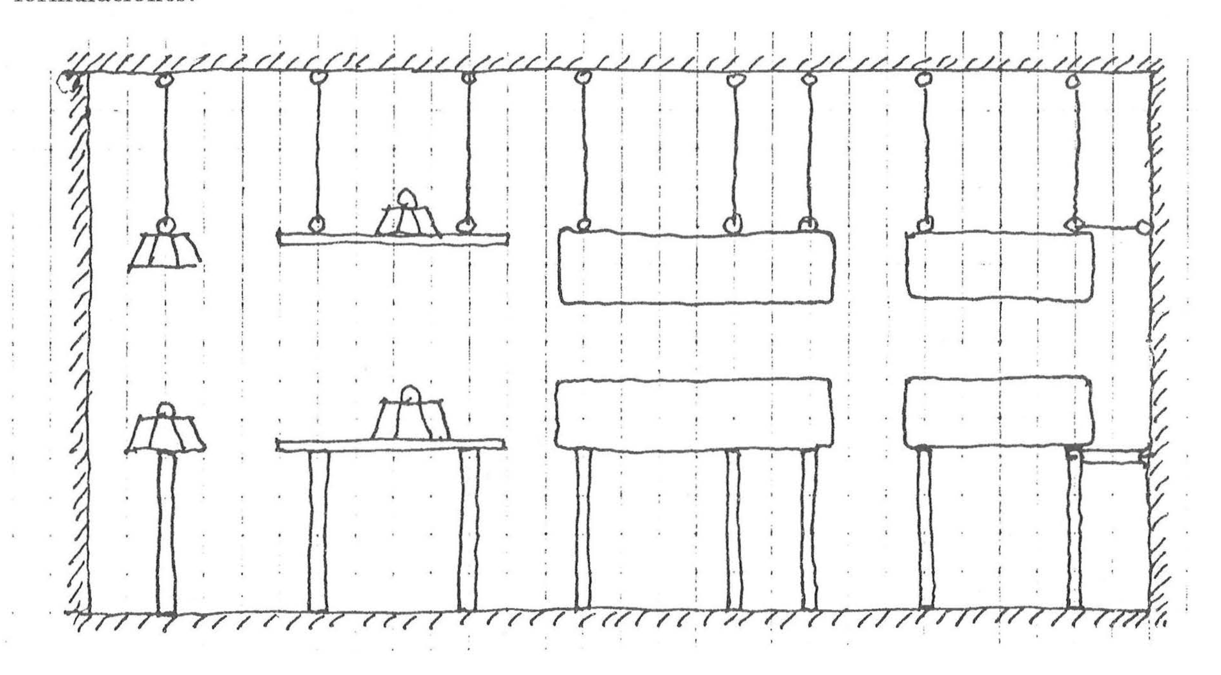


Figura I: **Estructuras traccionadas y comprimidas**

En la mitad de las estructuras de la figura I, el peso "cuelga" por debajo de la estructura. En consecuencia, sus distintos elementos se encuentran traccionados. Incluso algunas de ellas *son y no son* 'estructura' en el sentido más estricto del término: se podrían poner en movimiento sin más que una fuerza horizontal las empujara a ello. Sin embargo, si esa fuerza es ocasional y cesa apenas comienza a actuar, a lo más que asistiremos es a un suave balanceo tras el cual la

[1] Mariano Vázquez Espí (1997), Documento de Apoyo a la Docencia 2.01; Instituto Juan de Herrera (ETSAM), Madrid. A lo largo de este texto $\mathcal{ESD}$ significa una referencia a ese trabajo. La necesidad de su consulta dependerá de sus conocimientos previos.

estructura recobra el reposo original: la estructura es *estable* para las cargas previstas. Pequeños y transitorios cambios en las acciones no comprometen su equilibrio a largo plazo. Además de los argumentos empíricos, caben también los energéticos: la posición de equilibrio de un cable traccionado es la de *mínima* energía potencial (véase $\mathcal{ESD}$:15). Cualquier otra posición cercana es de mayor energía y hay que hacer trabajo extra para llevar allí a la estructura. Y en cuanto la fuerza perturbadora desaparece, la estructura vuelve al equilibrio original.

La otra mitad de la figura I son las mismas estructuras pero dadas la vuelta: ahora el peso se encarama por encima de cables y barras, comprimiéndolas. Los argumentos de sentido común sugieren que muy posiblemente, a la menor perturbación, estas estructuras se desplomarán, dejando caer el peso al suelo, su posición de mínima energía potencial dentro del espacio del laboratorio. En consecuencia, pueden tildarse de *inestables*. La pregunta pertinente es: ¿sirven los métodos utilizados para las estructuras traccionadas para comprobar o diseñar estructuras comprimidas? Anticipo la respuesta: sí, *excepto* en lo que se refiere *precisamente* a su estabilidad.

El camino que nos aguarda sigue los mismos pasos que en el caso de las estructuras traccionadas. Primero investigaremos el comportamiento mecánico de los materiales comprimidos mediante el único método conocido: experimentando con ellos. Veremos las complicaciones específicas que surgen en el ensayo de compresión y el modo de resolverlas. Después, extenderemos nuestras conclusiones a las estructuras propiamente dichas y al modo de comprobarlas y calcularlas.

Al argumento teórico le acompañan ejemplos numéricos, pensados para aclarar y matizar su significado a la vez que ilustrar su uso práctico en situaciones habituales en el diseño de estructuras.

1 Piezas comprimidas

Para determinar las propiedades de los materiales comprimidos, podemos en principio llevar a cabo experimentos similares a los de rotura por tracción: basta con dar la vuelta al conjunto y colocar el peso *por encima* del cable. Pero desde el principio resultan patentes las dificultades: lo que entendemos por cable (un cilindro de muy pequeño diámetro que puede ser doblado con facilidad) es incapaz de mantenerse de pie incluso sin peso encima: si queremos resistir compresiones necesitamos una pieza que no pueda ser doblada fácilmente, que oponga resistencia a combarse. Una varilla, de grueso suficiente, de madera o de acero, puede cumplir ese papel, pero no una cuerda o una cadena. Esta última, símbolo en no pocas ocasiones de fuerza opresora, es incapaz de mantenerse vertical por sí misma (salvo colgada de algo). Lo mismo ocurre con una cuerda, sólo un experto faquir con su magia pueda levantarla sobre el suelo. Incluso si la varilla es muy delgada (mucho más larga que ancha, muy esbelta) tendremos dificultades para ponerla de pie: no se dobla, pero tiene una irrefrenable tendencia a caer al suelo. (Sólo los malabaristas son capaces de mantenerla en pie, a costa de un buen número de habilidades que requieren una rara destreza.) A fin de poder trabajar con alguna comodidad nos veremos obligados a utilizar un cilindro cuya proporción altura/diámetro, su esbeltez, sea pequeña. Sólo así podremos colocar un peso encima y medir las propiedades del material ensayado. Estas primeras dificultades muestran que aunque en apariencia la tracción es en principio un fenómeno simétrico a la compresión (basta con cambiar de signo a las solicitaciones), la realidad se muestra mucho más complicada. De hecho, tenemos una primera conclusión: la resistencia a la compresión depende claramente de la *proporción* de la pieza (lo que no se concluyó del ensayo de tracción, véase $\mathcal{ESD}$:7) y, en consecuencia, los datos que podamos obtener de ensayos con piezas poco esbeltas (tensión de rotura, módulo de Young, etc) no podrán asignarse sin más a piezas muy esbeltas. En otras palabras, se trata de propiedades que el material *sólo* manifiesta en aquellas situaciones en que los fenómenos asociados a una esbeltez pronunciada han sido eliminados de alguna manera (siendo la drástica reducción de esbeltez la más simple de todas).[1]

Con todas las precauciones anteriores, las propiedades del acero como material son esencialmente simétricas (el límite elástico y el módulo de Young son iguales a compresión que a tracción). No ocurre así en la madera (véase la figura 1.1) para la que, de todas formas, se suele emplear valores muy similares, a veces idénticos, de tracción o compresión segura en la dirección de las fibras.[2] En el hormigón, la diferencia es tan acusada que coloquialmente se afirma que *no resiste tracciones* (también se dice lo mismo de la tierra, la piedra o muchos materiales cerámicos tradicionales). Se trata de una afirmación coloquial desde luego: un sólido *tiene* que resistir algún esfuerzo de tracción (de lo contrario se desparramaría como un líquido). Pero la

[1] Las complicaciones del fenómeno son tales que los protocolos homologables del ensayo de compresión son en general mucho más rigurosos en lo que hace a las dimensiones de las muestras que los de tracción. Se suelen usar cubos o cilindros de esbeltez 2 (doble alto que ancho) con dimensiones acordadas. Dependen de cada material ensayado.

[2] Esto tiene explicación: la menor resistencia de la madera a compresión se ve compensada por su mayor ductilidad. Se suele convenir también idénticos valores para el módulo de Young: la madera presenta una gran *deformación diferida* que aumenta con el tiempo a tensión constante: el valor del módulo de Young es nominal, acordado para tener en cuenta de una manera simple este tipo de fenómenos, cuyo modelado es complicado.

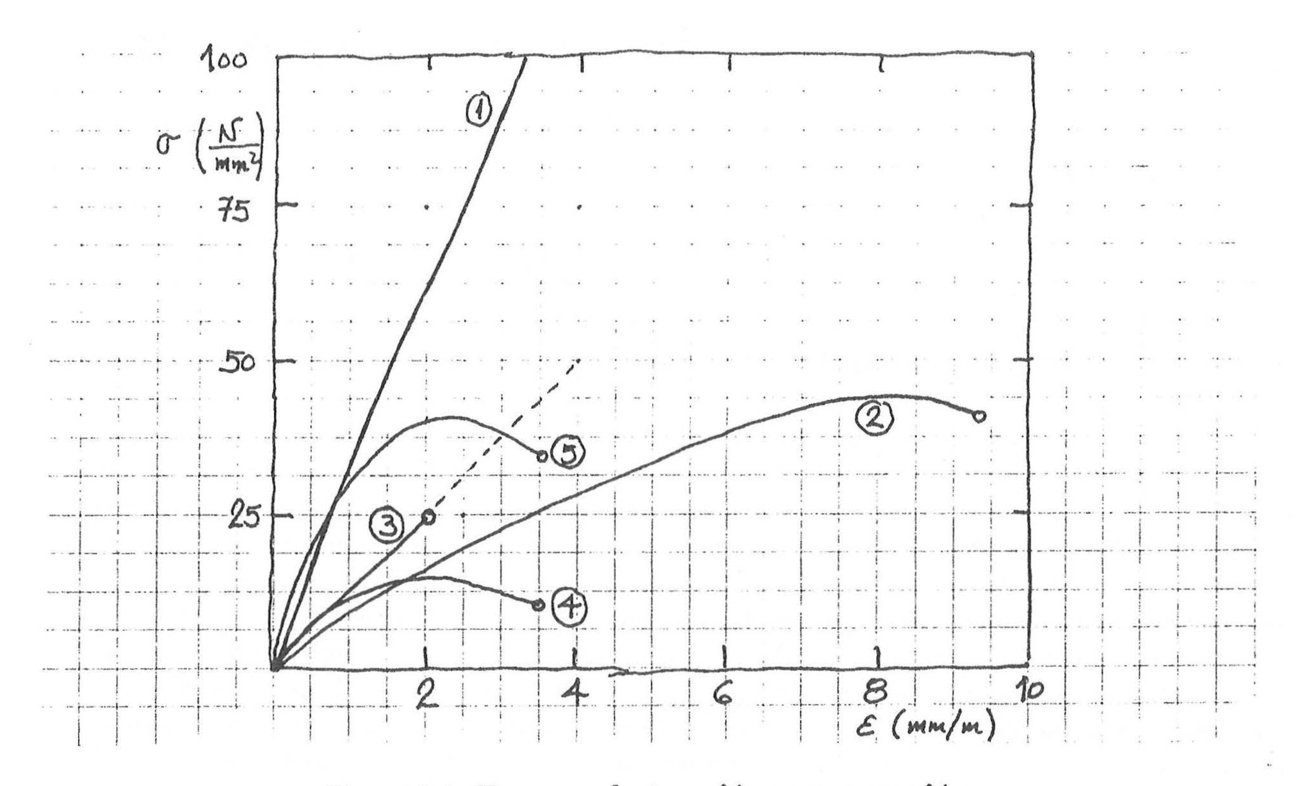


Figura 1.1: **Ensayos de tracción y compresión**
Madera solicitada paralelamente a sus fibras: 1. tracción, 2. compresión, 3. modelo nominal. Hormigón comprimido: 4 y 5, depende de su dosificación.

tracción resistida por el hormigón es tan pequeña que se puede prescindir de ella a casi todos los efectos prácticos (salvo en el análisis en detalle de fenómenos locales que, en caso contrario, resultarían inexplicables).

En conclusión, para la comprobación de piezas comprimidas muy poco esbeltas pueden emplearse las fórmulas utilizadas en tracción (véase $\mathcal{ESD}$:13) sin más que sustituir los valores en tracción, por sus homónimos en compresión (si es que son distintos).

1.1 Ensayo a compresión de piezas esbeltas. Arriostramientos

A fin de averiguar como corregir las propiedades del material en compresión cuando se emplea en forma de piezas muy esbeltas, no parece quedar otro camino que resolver las dificultades que su puesta en carga plantea. La primera y fundamental es *mantener la pieza en pie a la espera de ser cargada*. Una solución sencilla es disponer, en dos planos perpendiculares, piezas horizontales sujetas firmemente al laboratorio y a la cabeza de la pieza a ensayar, véase la figura 1.2. En lo sucesivo las denominaremos *arriostramientos*. Dependiendo de hacia que lado tienda se desplome la pieza, los arriostramientos se *traccionarían* o *comprimirían* impidiéndolo. Puesto que puede que tenga que soportar compresiones, el propio arriostramiento debe ser una pieza poco esbelta, de manera que los fenómenos asociados a esbelteces elevadas sean eliminados. Una alternativa es disponer dos cables en cada uno de los planos: incapaces de resistir compresiones, y según el lado del desplome, uno de ellos se tracciona y el otra se comba sin oponer resistencia. En el proceso de carga tenemos que asegurar que la rotura se produzca por fallo de la pieza y no de los

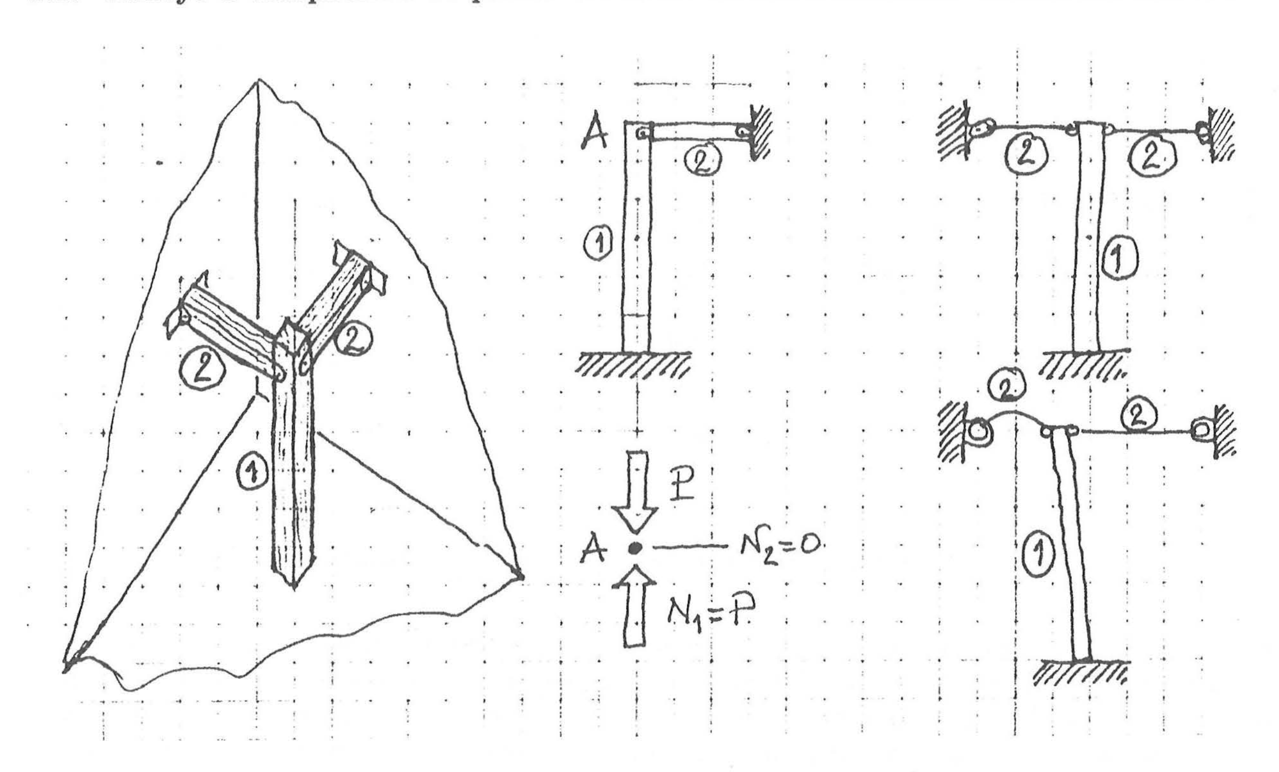


Figura 1.2: **Ensayo a compresión de piezas esbeltas**
1: pieza a ensayar; 2: arriostramientos.

arriostramientos, de manera que la resistencia de estos últimos debe ser objeto de comprobación.

Para averiguar la resistencia adecuada de los arriostramientos podemos examinar el equilibrio del conjunto bajo un peso P. Supongamos que hemos conseguido colocar la pieza en su posición *perfectamente* vertical, asegurada por los arriostramientos *perfectamente* horizontales. Bajo un peso vertical P las ecuaciones de equilibrio muestran que la solicitación en los arriostramientos es nula, puesto que P es equilibrado por la solicitación en la pieza. Llegamos así a una paradójica situación: si no disponemos los arriostramientos, la pieza tiende a caerse aun antes de cargarla. Pero si se disponen, no han de resistir esfuerzo alguno. Parece como si su sola existencia (con independencia de su rigidez o resistencia) resolviera el problema.

La paradoja se produce porque estamos aplicando las ecuaciones de equilibrio a la geometría inicial (sin carga), mientras que el fenómeno que los arriostramientos impiden sólo se hace *visible* al considerar una geometría deformada, la del equilibrio (si existe). Este es uno de los pocos casos en los que el análisis sobre la geometría inicial *no muestra* el fenómeno de interés, impidiendo su análisis cuantitativo.[3]

Para poder cuantificar la resistencia necesaria en los arriostramientos hemos de aplicar las ecuaciones de la estática a una geometría de equilibrio (aun hipotética). Supongamos que uno de los arriostramientos estuviera traccionado bajo un peso P, véase la figura 1.3. Conocida su geometría y las propiedades del material, podemos establecer la relación entre su alargamiento Δ y su solicitación N con el formulismo habitual, $N = k_{N\Delta}\Delta$ con $k_{N\Delta} = \mathrm{EA/L}$. El alargamiento Δ es simultáneo con el desplome[4] η de la pieza, en este caso idéntico al desplazamiento en cabeza δ, idéntico a su vez al alargamiento Δ. (Se puede medir el desplome en relación a la altura

[3]En general, el análisis con la geometría inicial reduce a cero los desplazamientos, pero no las solicitaciones. En este caso, ambas magnitudes se reducen a nada en lo que se refiere a los arriostramientos y eso es justamente lo que obtenemos.

[4]Según el DRAE, el desplome es "lo que sobresale de la línea del plomo".

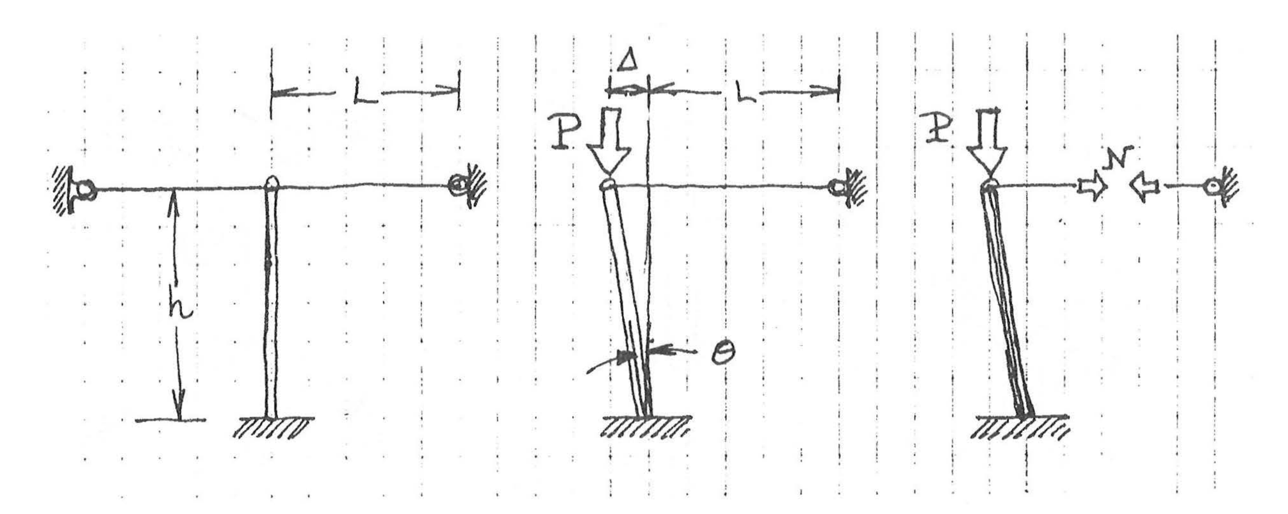


Figura 1.3: **Arriostramientos en el ensayo de compresión**

mediante la inclinación que provoca en el soporte, es decir, con el ángulo θ girado alrededor de la base de la pieza. Si los desplazamientos son pequeños y el ángulo está expresado en radianes, $\theta \approx \tan\theta \approx \delta/h$. Esta medida del *desplome relativo* es más general, al no depender del *tamaño* de una estructura particular.) Supongamos que en *esta posición* hay equilibrio. Tomando momentos respecto al pie de la pieza y suponiendo que δ es un desplazamiento pequeño obtenemos:

$$P\delta \approx Nh$$

expresión que determina que relación debe existir entre la solicitación soportada por el arriostramiento y el peso soportado por la pieza. El momento $P\delta$ puede verse como una perturbación (la que de hecho provoca la caída de la pieza sin arriostramientos), mientras que el momento Nh tiende a compensar el efecto de la perturbación, es el momento que conserva el equilibrio (gracias a los arriostramientos). Ambos momentos *dependen* linealmente de δ:

$$P\delta \approx k_{N\Delta}\Delta \cdot h = k_{N\Delta}\delta \cdot h$$

de manera que la condición de equilibrio *no depende* del valor concreto de δ, tan sólo de la condición $\delta > 0$. Visto desde el 'punto de vista' del peso, hay equilibrio si:

$$P \approx k_{N\Delta}h$$

para cualquier valor de δ (que sea pequeño). Las situaciones de desequilibrio son dos, una favorable y otra no:

1. Si $P < k_{N\Delta}h$, la acción estabilizadora es mayor que la perturbación y *la geometría inicial se restablece*: δ vuelve a ser nulo y la solicitación en el arriostramiento también.

2. Si $P > k_{N\Delta}h$ la perturbación no puede ser compensada, no hay equilibrio, δ aumenta sin cesar hasta provocar la rotura del arriostramiento y la caída de la pieza al suelo.

En conclusión el valor $k_{N\Delta}h$ es un valor *crítico* de la carga P: si se supera no hay equilibrio posible; si se alcanza el equilibrio es *indiferente* al valor de δ; si no se alcanza, la geometría inicial no se altera en absoluto. La carga $k_{N\Delta}h$ de denomina por ello *carga crítica* del arriostramiento, P_{cr}.

La conclusión desde el 'punto de vista' del arriostramiento es que su rigidez $k_{N\Delta}$ debe ser estrictamente mayor que P/h. No basta aquí que sea igual, puesto que hemos de asegurar

que el desplome, $\eta = \delta$, sea pequeño para que nuestro modelo del equilibrio sea válido, y con $k_{N\Delta} = P/h$, el desplome η podría tener cualquier valor. Como se ve no se trata de una condición sobre la resistencia del arriostramiento sino sobre su rigidez: si se cumple, el arriostramiento no habrá de soportar ningún esfuerzo.

El análisis anterior resulta poco satisfactorio: resulta inverosímil que un ligero cambio por encima o por debajo de P_{cr} pueda conducir a comportamientos tan distintos.[5] De hecho, lo prudente es asignar ese extraño comportamiento al análisis con desplazamientos pequeños (de primer orden, lineal) y no a la estructura en cuestión. Para confirmar esta conjetura lo mejor sería acudir a un análisis de orden superior, sin restricción sobre el valor de δ. Pero, en este caso, tal análisis confirmaría esencialmente el resultado obtenido aquí.

Hay otro motivo de inquietud: si el análisis es tan sensible a pequeñas variaciones, no basta sólo con cumplir la condición $k_{N\Delta}h > P$ (con un coeficiente de seguridad convenido), tenemos también que asegurar que todas nuestras hipótesis se cumplen, en particular que la pieza y los arriostramientos son colocados *perfectamente* en su posición inicial. Y aquí topamos de nuevo con dificultades insalvables: por perfectos que sean nuestros medios de control de la geometría construida sólo podremos asegurar que la geometría real se ajusta a la proyectada *dentro de ciertos márgenes de tolerancia*. Es decir, casi con certeza podemos afirmar que la pieza será imperfecta: que incluso antes de cargarla estará algo desplomada, aunque podremos asegurar que la *imperfección*, el *desplome inicial*, η_0, será menor en valor absoluto que una cierta *tolerancia de fabricación*, η_{tol}. ¿Afectará este desplome a las conclusiones del análisis precedente?

1.1.1 Análisis con imperfecciones iniciales

Supongamos que la pieza tiene un cierto desplome inicial η_0 (que podemos seguir considerando pequeño), y que en esa posición se dispone el arriostramiento de longitud L, véase la figura 1.4. El análisis del equilibrio en esta posición inicial revela que al proceder a cargar, el peso P da un momento de valor $P\eta_0$ respecto al pie de la pieza, y puesto que el arriostramiento no se ha deformado todavía, no hay nada que pueda compensar la perturbación. Debemos concluir que inicialmente *no hay equilibrio*. La perturbación apartará a la pieza de la vertical aún más. Para evitarlo, el arriostramiento tiene que reaccionar con al menos una fuerza $N_1 = P\eta_0/h$, por la que hay que 'pagar' con al menos un alargamiento $\Delta_1 = N_1/k_{N\Delta}$, lo que origina un desplome adicional $\eta_1 = \Delta_1$. Pero esto origina un incremento en el momento de P de valor $P\eta_1$, que requiere un incremento en la solicitación del arriostramiento de valor $N_2 = P\eta_1/h$, motivo de un nuevo alargamiento y un nuevo desplome adicionales $\Delta_2 = \eta_2 = N_2/k_{N\Delta}, \ldots$ ¿Convergerá el proceso a una situación de equilibrio o, por el contrario, el incremento del desplome continuará sin límite?

Los incrementos de desplome forman una progresión geométrica:

$$\eta_0, \quad \eta_1 = \frac{P}{k_{N\Delta}h}\eta_0, \quad \eta_2 = \frac{P}{k_{N\Delta}h}\eta_1, \ldots, \quad \eta_{i+1} = \frac{P}{k_{N\Delta}h}\eta_i, \ldots$$

de razón $r = P/k_{N\Delta}h = P/P_{cr}$. El primer término es el desplome *inicial* (como mucho igual a la tolerancia de fabricación, $\eta_0 \leq \eta_{tol}$), los siguientes representan el *alargamiento* del arriostramiento en su intento de evitar que el desplome aumente. El desplome total η tiene en consecuencia dos componentes: el primero no implica deformación, sólo imperfección inicial; el segundo, en este caso igual en valor al alargamiento total del arriostramiento, es debido a la deformación *necesaria* para alcanzar el equilibrio. En otras palabras, para alcanzar el equilibrio

[5] En la jerga del análisis de funciones no-lineales a tales valores se les denomina *puntos de bifurcación*. El objeto en estudio presenta dos comportamientos muy distintos según que esté a un lado u otro de la bifurcación.

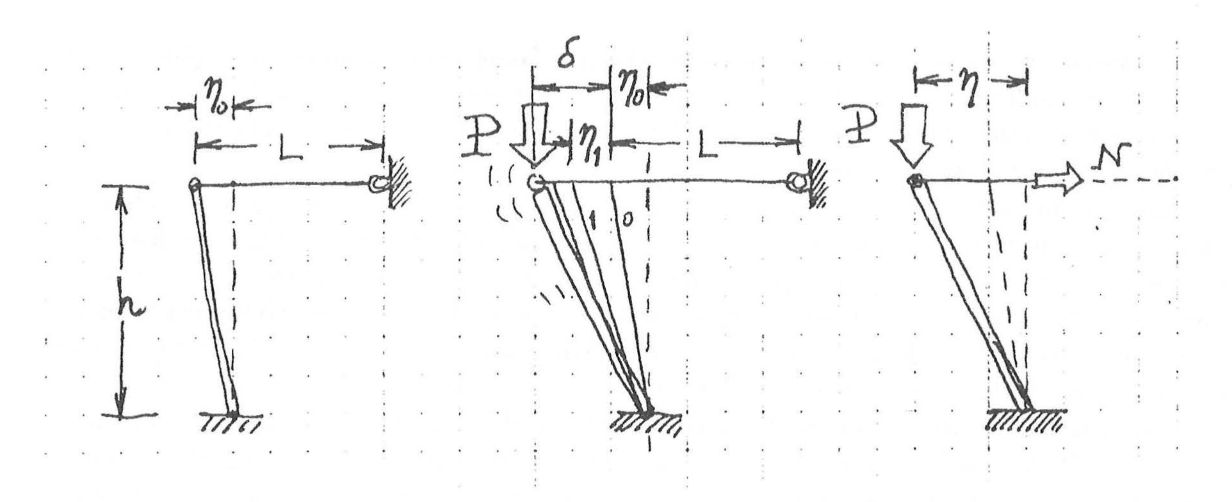


Figura 1.4: **Equilibrio con desplome inicial**
A la izquierda se muestra la geometría inicial, imperfecta; en el centro, el incremento del desplome en busca del equilibrio tras cargar la estructura; a la derecha, la situación final de equilibrio, supuesto que se alcance.

es necesario que la estructura se desplaze una cierta cantidad δ, que incrementa *inevitablemente* el desplome:[6]

$$\eta = \eta_0 + \delta = \eta_0 + \Delta$$

El desplome total η se obtiene sumando la progresión geométrica de razón $r = P/\mathrm{P_{cr}}$:

$$\eta = \eta_0 \frac{1}{1-r} = \eta_0 \frac{1}{1-P/\mathrm{P_{cr}}} = \eta_0 \frac{\mathrm{P_{cr}}}{\mathrm{P_{cr}} - P} \tag{1.1}$$

y la condición para que la suma sea finita, es decir, para que exista un valor de η en el que se alcanza el equilibrio es justamente la misma que en el análisis precedente:[7] $\mathrm{P_{cr}} = k_{N\Delta} h > P$. La carga crítica sigue deslindando las situaciones estables de las inestables, pero ahora $P = \mathrm{P_{cr}}$ *es una situación inestable* que conduce a desplomes 'infinitos'. Además, sabemos cuál es el desplazamiento necesario para que la estructura alcance su posición de equilibrio, $\delta = \eta - \eta_0$ y *podemos comprobar si efectivamente es un desplazamiento pequeño* (lo que es necesario tanto para que el análisis sea válido, como para que se cumpla el requisito de rigidez):

$$\delta = \eta_0 \frac{P}{\mathrm{P_{cr}} - P} \leq \eta_{\mathrm{tol}} \frac{P}{\mathrm{P_{cr}} - P} \leq \delta_{\mathrm{tol}} \tag{1.2}$$

Limitar el valor de la ampliación del desplome, δ, a un valor convenido como tolerable, δ_{tol}, equivale a imponer condiciones a la rigidez del arriostramiento. En efecto, puesto que, en este caso particular, δ es igual al alargamiento del arriostramiento, $\Delta = \varepsilon L$ (donde ε es su deformación), resulta: $\delta = \varepsilon L$, y como el requisito de rigidez exige $\delta \leq \delta_{\mathrm{tol}}$, la deformación de trabajo en el arriostramiento bajo P debe cumplir con:

$$\varepsilon \leq \frac{\delta_{\mathrm{tol}}}{L}$$

[6] La notación empleada intenta reflejar esa situación: η representa desplomes con independencia de su origen; δ y Δ los efectos de la deformación ya sea en la estructura (desplazamiento) ya en sus partes (alargamiento). En este caso las magnitudes coinciden, pero no ocurrirá así en otros, de manera que la notación empleada se anticipa a los resultados que se obtendrán más adelante.

[7] Nótese que la fórmula de la suma de una progresión geométrica sólo tiene sentido matemático y físico, si r es menor que la unidad. En caso contrario, la fórmula es incorrecta e ininteligible: como se puede comprobar arrojaría desplomes... ¡negativos!

Pero además tiene que tratarse de un arriostramiento seguro, con deformación a lo sumo igual a la segura para el material, $\varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{f}}$, así que en conjunto:

$$\varepsilon \leq \min\left\{\frac{\delta_{\mathrm{tol}}}{L}, \varepsilon_{\mathrm{f}}\right\}$$

Lo ideal es usar el material del arriostramiento de tal *forma* que toda su resistencia sea aprovechada, $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{f}}$. En tal caso, para cumplir con el requisito de rigidez debe ser: $\varepsilon_{\mathrm{f}} \leq \delta_{\mathrm{tol}}/L$. De aquí resulta una condición para la *forma* de un arriostramiento fabricado con un material dado, puesto que ahora tenemos una condición sobre la *longitud* del arriostramiento:

$$L \leq \frac{\delta_{\mathrm{tol}}}{\varepsilon_{\mathrm{f}}} = \mathrm{L_{lim}}$$

que opera como un límite superior a la longitud de los arriostramientos que *aprovechan toda la resistencia del material*. (Por supuesto, pueden disponerse arriostramientos más largos, pero entonces tendrán que dimensionarse de manera que su deformación ε sea menor que la segura del material, ε_{f}, en la misma proporción en que su longitud L supere a la *longitud límite*, $\mathrm{L_{lim}}$.)

En la posición de equilibrio, con un desplome η (pequeño), la solicitación del arriostramiento será justamente la necesaria para equilibrar el momento de P:

$$N = \frac{P\eta}{h} = P\frac{\eta_0}{h}\frac{1}{1 - P/\mathrm{P_{cr}}} = N_1\frac{1}{1-r} \leq P\frac{\eta_{\mathrm{tol}}}{h}\frac{1}{1-r}$$

La penúltima expresión muestra que la razón de la progresión geométrica hacia el equilibrio, r, es determinante para la solicitación en el arriostramiento. Por supuesto, con métodos de fabricación adecuados, la tolerancia η_{tol} será del orden de la milésima del tamaño de la pieza h, de manera que *en principio* la solicitación N podría ser igualmente pequeña respecto a la carga que hay que estabilizar, P. Pero puesto que cierta deformación es inevitable, con la consiguiente ampliación del desplome, *al final*, todo depende de r. Con valores de r moderados, como de 0,1 (una carga crítica diez veces mayor que el peso), la solicitación inicial debe ampliarse aproximadamente un 10% respecto al valor de partida. Por el contrario con valores próximos a la unidad, como 0,9 (peso del mismo orden de magnitud que la carga crítica), la solicitación inicial debe multiplicarse por diez. Un modo de asegurar la calidad de un diseño (que puede usarse alternativamente a la formulación explícita de los requisitos de rigidez y resistencia del arriostramiento) consiste en imponer un límite a la proporción entre el peso y la carga crítica del arriostramiento, es decir, a la razón de la progresión, r. Si $r \leq 0,1$ aseguramos que la solicitación en el arriostramiento es sólo un poco mayor que la inicial, requerida por una geometría inicial imperfecta. Además, también limitamos la ampliación del desplome a un 10% de la tolerancia de fabricación, de forma que si ésta es ya pequeña, el desplazamiento de la estructura será un orden de magnitud menor, y el desplome total sólo ligeramente mayor que el inicial.

Los argumentos basados en la progresión hacia el equilibrio son de gran generalidad: pueden aplicarse mediante modelos aproximados incluso en situaciones mucho más complejas que la analizada aquí. Otros métodos *más directos y elegantes* (que emplearemos más adelante) carecen de esa propiedad. Por ello es aconsejable guardar en la memoria la posibilidad de recurrir a la progresión hacia el equilibrio cuando no se encuentre otro camino de comprobar de forma sencilla la estabilidad de una estructura.

Comprobación de arriostramientos

Fijadas las condiciones del problema (δ_{tol}, η_{tol}, P y h) y el diseño del arriostramiento (E, A, L y ε_{f}), la comprobación del arriostramiento es como sigue:

1. Si $P_{cr} = (EA/L) \cdot h \leq P$ el arriostramiento es insuficiente, puesto que η se ampliará indefinidamente.

2. En otro caso, si el desplazamiento δ resulta mayor que δ_{tol} (es decir, $\delta > \delta_{tol}$), el arriostramiento es intolerablemente flexible y debiera aumentarse su rigidez. Para ello puede disminuirse su longitud lo que de paso ahorra material. Si eso no es posible sólo queda aumentar su área (y por tanto su coste).[8]

3. En otro caso, si la deformación del arriostramiento $\varepsilon = N/(\mathrm{EA})$ es mayor que ε_f, el arriostramiento es inseguro: de nuevo tenemos dos alternativas, disminuir su longitud o aumentar su área.

4. En otro caso, el arriostramiento es seguro y suficientemente rígido para asegurar la estabilidad de la pieza bajo una carga P.

Diseño de arriostramientos

Fijadas las condiciones del problema (δ_{tol}, η_{tol}, P y h) y el material con que se construye el arriostramiento (E y ε_f), el diseño del arriostramiento es como sigue:

1. Para asegurar la rigidez y la resistencia del arriostramiento, debe diseñarse para trabajar con una deformación

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\delta_{tol}}{L}, \varepsilon_f\right\}$$

Si se puede elegir su longitud, con $L \leq \delta_{tol}/\varepsilon_f$ aseguramos que se cumple el requisito de rigidez *con tal que se cumpla el de resistencia*, $\varepsilon \leq \varepsilon_f$.

2. En consecuencia, la tensión de trabajo debe ser $\mathrm{E}\varepsilon$ y el área del arriostramiento debe ser como poco:

$$A_{min} = \frac{1}{\sigma}\frac{P\eta}{h} = \frac{P(\eta_{tol} + \varepsilon L)}{E\varepsilon h} = \frac{P}{E\varepsilon}\left(\frac{\eta_{tol}}{h} + \varepsilon\frac{L}{h}\right) = \frac{P}{\sigma}\left(\frac{\eta_{tol}}{h} + \frac{\sigma}{E}\frac{L}{h}\right)$$

En las dos últimas expresiones (en función de la deformación la primera, de la tensión de trabajo σ la otra) puede observarse como influyen en el grueso necesario las distintas *proporciones geométricas* y *mecánicas*, la de la tolerancia de fabricación y la altura de la pieza por una parte, es decir, la *tolerancia relativa*; la de la longitud del arriostramiento y esa misma altura por la otra, es decir, la *proporción* o *esbeltez* del *esquema* de la estructura; y finalmente, la proporción entre la tensión y el módulo de Young. Nótese que mientras que la rigidez del material disminuye la cantidad necesaria para asegurar la estabilidad, la tensión de trabajo tiene una influencia ambivalente: disminuye la cantidad de material necesaria para hacer frente al desplome total, pero *aumenta* la ampliación del desplome: con mayor tensión (a igualdad de todo lo demás) la ampliación será, en proporción, mayor.

[8] Esto puede parecer paradójico, pero en el diseño de estructuras es una situación habitual. Cuando se trata de ajustar un diseño resistente pero intolerablemente flexible, nos encontramos con dos caminos contrapuestos: si se puede operar sobre la forma de la estructura, podrá buscarse un nuevo *esquema* o una nueva *proporción* con rigidez suficiente y que, además, *tendrá menor coste* que la solución de partida; pero si sólo se opera sobre el *dimensionado* se conseguirá una solución rígida pero también más costosa (más gruesa). Ambos caminos conducen a soluciones *aceptables* desde el punto de vista del diseño de estructuras, pero en mi opinión sólo el primer camino conduce a soluciones *estéticamente* satisfactorias. Claro que, en muchas ocasiones, requisitos no estructurales impiden esa andadura.

Si en cada plano arriostrado sólo existe un arriostramiento, desde luego debe ser muy poco esbelto, puesto que la imperfección inicial (y con ella el desplome en el equilibrio) puede caer hacia un lado u otro, de manera que no podemos anticipar si el arriostramiento estará comprimido o traccionado. Si hay *dos* cables en cada plano ortogonal, uno de los cables se traccionará, mientras que el otro se combará sin oponer resistencia, según el lado hacia el que la pieza esté inicialmente desplomada.[9]

Ejemplo 1.1: Diseño de arriostramientos horizontales de acero. *Es posible destilar una regla de diseño para los casos más corrientes en acero. Las tolerancias de fabricación habituales se fijan en relación a la altura h, en el valor 0,2%. Es decir,* $\eta_{\text{tol}}/h = 2\,\text{mm/m}$. *Un requisito de rigidez muy común limita el desplazamiento también en relación con la altura al mismo valor,* $\delta_{\text{tol}}/h = 2\,\text{mm/m}$. *Esto permite calcular en avance un límite sobre la deformación del arriostramiento:*

$$\varepsilon \leq \frac{\delta_{\text{tol}}}{L} = 2\,\text{mm/m}\frac{h}{L}$$

Si queremos un diseño eficaz, que aproveche toda la capacidad resistente del material, debe ser $\varepsilon \approx \varepsilon_{\text{f}}$. *Para el acero laminado corriente en España* $\text{E} = 210\,\text{kN/mm}^2$, $\sigma_{\text{e}} = 260\,\text{N/mm}^2$ *y* $\gamma \approx 1{,}44$, *de manera que* $\text{f} = 180\,\text{N/mm}^2$ *y* $\varepsilon_{\text{f}} = 0{,}86\,\text{mm/m}$.[10] *En consecuencia, un diseño eficaz en acero corriente debe cumplir con* $0{,}86\,\text{mm/m} \leq 2\,\text{mm/m} \cdot h/L$, *es decir,*

$$L \leq 2{,}3h$$

Mientras se cumpla esta condición, el diseño puede ser estricto, *es decir, puede calcularse con la máxima deformación, la segura, y se cumple simultáneamente el requisito de rigidez. En esas condiciones, además, la solicitación está limitada a una fracción* constante *del peso* P*:*

$$N = \frac{\text{P}\eta}{h} \leq \text{P}\frac{\eta_{\text{tol}} + \delta_{\text{tol}}}{h} = 0{,}004\text{P}$$

En consecuencia, el material necesario para estabilizar P *es francamente pequeño y nuestra primera conclusión se mantiene en lo esencial: casi basta con la existencia de cuatro finos alambres (en relación al calibre de la pieza ensayada) para asegurar la estabilidad del conjunto. En concreto, el área que como mucho hay que disponer en cada cable en las condiciones anteriores es:*

$$A \leq 0{,}004\frac{\text{P}}{\text{f}}$$

Si la pieza ensayada es del mismo acero empleado en los alambres, podemos estimar el valor máximo de P *que hay que estabilizar: no puede ser mayor que la capacidad resistente de la pieza* en tracción, *es decir, del orden de* $260\,\text{N/mm}^2 \times \text{A}_p$, *siendo* A_p *el área de la pieza. En consecuencia, bastará con alambres con un área mínima:*

$$A \leq 0{,}004\frac{260\,\text{N/mm}^2}{181\,\text{N/mm}^2}\text{A}_p = 0{,}006\text{A}_p$$

Nótese que si se diseñan así, la tensión en los arriostramientos alcanzaría el valor de la tensión segura si la pieza pudiera resistir un peso de $260\,\text{N/mm}^2 \times \text{A}_p$. *Hay buenas razones para sospechar que la pieza colapsará con pesos bastante menores, de manera que bajo las cargas que podemos considerar seguras para la pieza, los arriostramientos así diseñados estarán sometidos a una tensión que será menor que la tensión segura: quien se rompe es la pieza. Una vez más, los arriostramientos se disponen para asegurar la estabilidad 'en todo momento', trabajando con tensiones seguras, pero precisamente porque se disponen nunca alcanzarán tales tensiones bajo las cargas habituales.*

La regla de diseño para arriostramientos eficaces se resume (en este caso) como:

En acero corriente, para la estabilidad de una pieza, la longitud de los arriostramientos horizontales no debe superar dos veces la altura de la pieza, y basta y sobra con que su área sea seis milésimas del área de la propia pieza.

Nótese que la regla es puramente geométrica y no se necesita ya realizar ningún cálculo intermedio: ésta es la conclusión ideal que el diseño de estructuras espera alcanzar en todos los problemas que se plantea, pero no siempre es fácil conseguirlo. □

[9] Faltaría aquí analizar la posibilidad de un desplome fuera de los *dos* planos ortogonales que contienen los arriostramientos, pero para el grado de precisión con que se conocen normalmente las acciones y dados los coeficientes de seguridad habituales, no se alterarían esencialmente las conclusiones obtenidas.

[10] Para el vocabulario y la justificación de la notación empleada, véase $\mathcal{ESD}$:7–15.

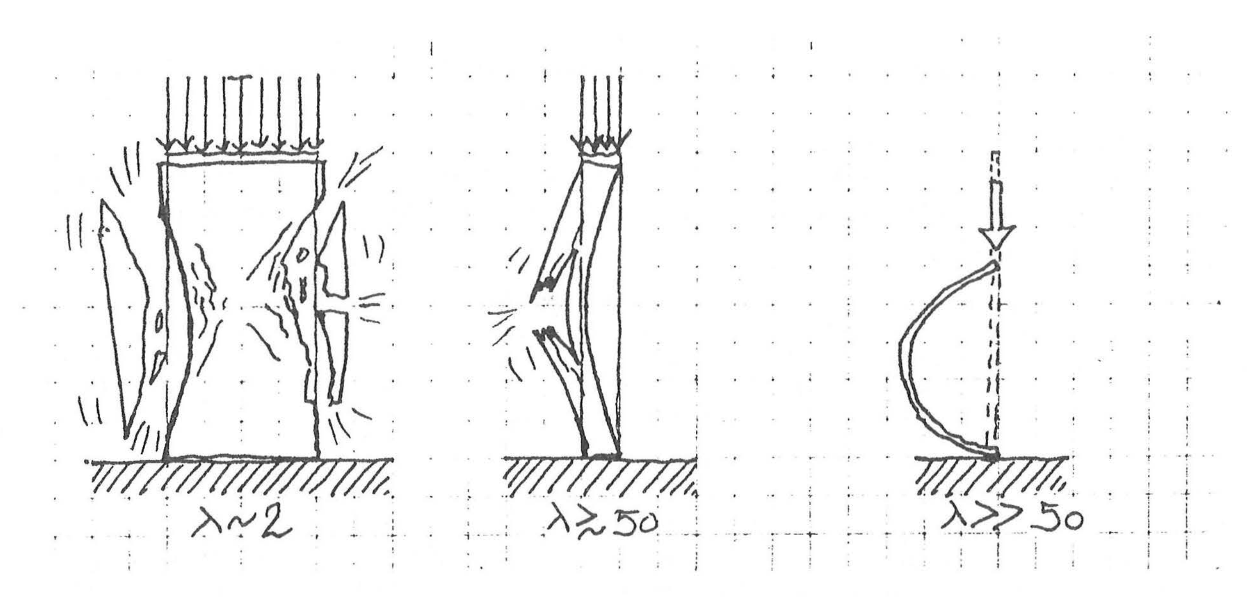


Figura 1.5: **Compresión: formas de rotura.**

1.2 Ensayo a compresión de piezas esbeltas. Resultados

Una vez proyectados y dispuestos los arriostramientos podemos realizar el ensayo de la pieza. Tanto la descripción como la explicación de los resultados obtenidos excede con mucho el alcance de este texto. Baste con resumir las conclusiones generales a las que se llega, véanse las figuras 1.5 y 1.6.

1. El colapso de la pieza depende de su *esbeltez*, de la proporción entre su altura y su base. Para piezas *poco esbeltas*, se observa un *aplastamiento* de la pieza, muchas veces con una violenta expulsión lateral de material. Sin embargo, con piezas *muy esbeltas* bien arriostradas no se produce aplastamiento apreciable, sino un incesante *combamiento* que tiende a sacar su punto medio de la vertical: la pieza *pandea*[11] (y el fenómeno de inestabilidad en este caso se conoce como *pandeo* de la pieza). El fenómeno presenta claras analogías con el comportamiento *global* de la pieza y su arriostramiento: la compresión amplía cualquier imperfección inicial de la pieza, y puesto que esta no puede ser *perfectamente recta*, su apenas inapreciable curvatura aumenta durante el proceso de carga. Todo parece indicar que la esbeltez juega un papel determinante en que esa ampliación de curvatura sea grande o pequeña, del mismo modo que la rigidez del arriostramiento determina la magnitud de la ampliación del desplome.

2. A igualdad en la sección de la pieza ensayada, el valor de la carga soportada disminuye *drásticamente* con la esbeltez. Mientras que para esbelteces muy pequeñas se produce la rotura física por aplastamiento y han de alcanzarse pesos notables (incluso para los materiales más débiles), para esbelteces moderadas, el colapso de la pieza se produce por la curvatura de su sección central con cargas mucho más modestas, que puede dar lugar a una rotura si el material es frágil, o a una pieza doblada 180° si el material es dúctil. Para las piezas muy, muy esbeltas incluso de materiales de gran resistencia, ni siquiera se necesitan especiales aparatos de carga: salvo por la dificultad de manejar piezas muy largas, una persona sola podría curvarla comprimiéndola entre sus manos.

---

[11] "**pandear.** Torcerse una cosa encorvándose, especialmente en el medio. Se usa hablando de las paredes, vigas y otras cosas." DRAE.

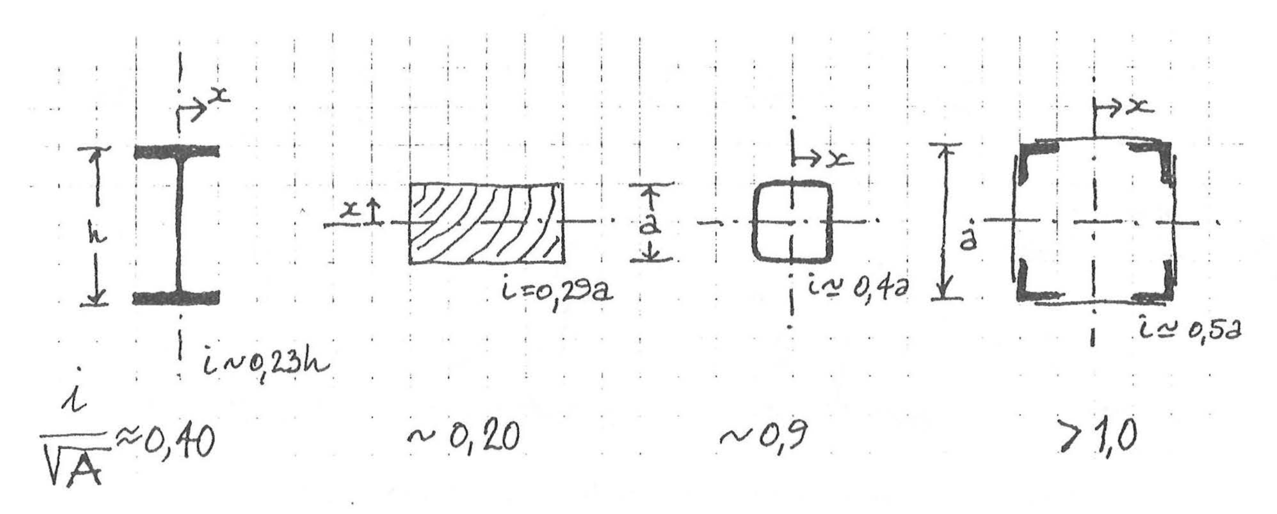


Figura 1.6: **Compresión: tipos de sección.**

3. A igualdad de área y altura, es decir, de cantidad de material, las particularidades de la sección ensayada tienen importancia, véase la figura 1.6. No es lo mismo disponer un cierto área de material en forma de sección circular (cilindro macizo) que como un anillo circular (un tubo hueco). A igualdad de área, la resistencia aumenta en el último caso. Para 'medir' la *aptitud de la forma de la sección* se emplea (en vez de la esbeltez geométrica o visual) la esbeltez mecánica de la pieza, razón entre su altura h y su *radio de giro* i, $\lambda = h/i$.[12]

4. Las propiedades del material también tienen importancia: a igualdad de todo lo demás, la capacidad resistente aumenta con el módulo de Young en compresión (medido mediante el ensayo de piezas muy poco esbeltas).

Puede lograrse cierta intuición sobre la importancia de la esbeltez en estos fenómenos, considerando el siguiente experimento mental, véase la figura 1.7. Considérese que primero ensayamos una pieza y determinamos la carga que produce su colapso $\mathrm{P_u}$. Si ahora ensayamos dos piezas iguales a la anterior, una encima de la otra, *y la situación fuera estable*, cabría esperar que resistieran la misma carga $\mathrm{P_u}$ (esto es lo que sucedía en el ensayo de tracción, véase $\mathcal{ESD}$:7). Pero ¿puede ser estable? Considerando que puede existir un cierto desplome en cada una de las dos piezas y aplicando similares argumentos a los empleados para una única pieza, vemos que no: la unión entre las dos piezas puede salirse de la vertical y *no existe en principio* nada que pueda ayudar a restituir la situación inicial o, al menos, contener la ampliación de ese desplazamiento. En un ensayo real, de hecho, la nueva carga de rotura $\mathrm{P_1}$ es muchísimo más pequeña que $\mathrm{P_u}$. Para estabilizar la situación podríamos recurrir a disponer arriostramientos también

[12]Recuérdese que el radio de giro de una sección plana respecto a un eje es la raíz cuadrada de la razón entre su inercia I respecto al eje y su área, $i = \sqrt{I/A}$, siendo la inercia respecto al eje $I = \int x^2\, dA$ en donde x es la distancia al eje de cada punto de la sección. El radio de giro puede interpretarse como la distancia a la que habría que alejar el área A del eje en cuestión para producir la misma inercia I. Cuanto más alejado está el material del centro de gravedad de la sección mayor es la inercia, y a igualdad de área, mayor el radio de giro. Puesto que el centro de gravedad de la sección es la directriz 'natural' que sirve para modelar la pieza como una línea, el radio de giro utilizado lo es respecto a ejes que pasan por el centro de gravedad. En secciones con simetría central, el radio de giro es constante para todos los ejes que pasan él. En secciones con dos ejes de simetría ortogonales, el radio de giro es máximo respecto a uno de ellos, denominado eje de *inercia fuerte*, mientras que es mínimo para el otro, de *inercia débil*. De pandear, la pieza lo hará curvándose dentro del plano perpendicular al eje de inercia débil, en el plano en el que *mecánicamente* la vemos más esbelta. En consecuencia, para el pandeo, lo que interesa determinar es el *radio de giro mínimo* de la sección. El pandeo de una tira de papel grueso, o de cartulina fina, sometida a una ligera compresión ayudará a reflexionar (y recordar) estos detalles.

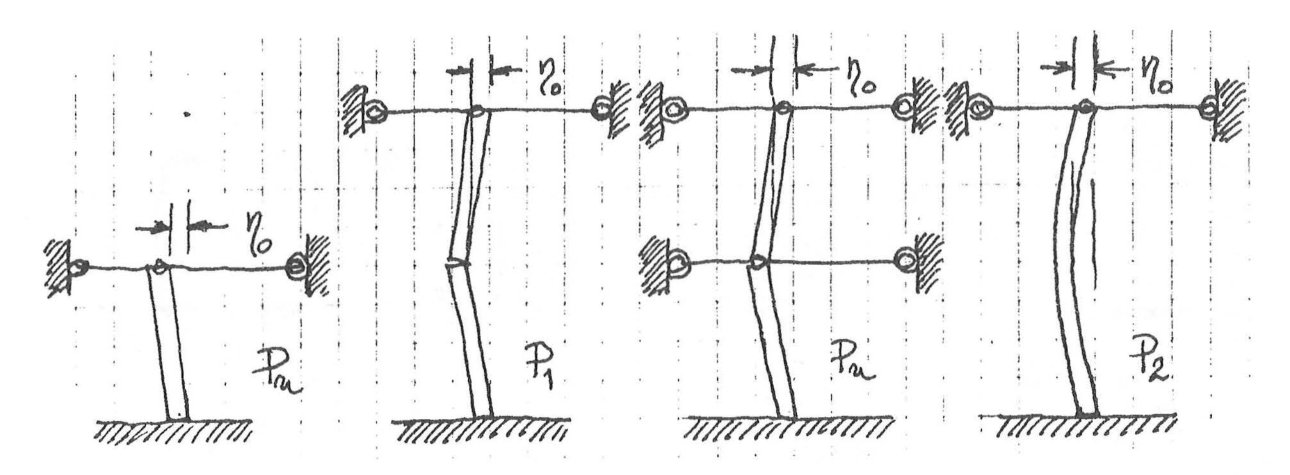


Figura 1.7: **Ensayo a compresión de piezas compuestas**

en la mitad de la altura, y en tal caso obtendríamos efectivamente la misma carga que con una sola pieza, P_u. Existe otra alternativa: sin el arriostramiento en la mitad de la altura vemos que la unión de simple contacto entre las piezas se 'abre' girando como una bisagra. Podríamos impedir el giro relativo entre las dos piezas por cualquier otra medio, 'cosiendo' sus bordes por ejemplo, a fin de evitar que se separen permitiendo el giro. En particular podríamos construir algo semejante al conjunto de dos piezas sobrepuestas, *pero de una sola pieza.* En este nuevo ensayo obtenemos, de todas formas, una carga P_2 menor que P_u. Podemos interpretar este hecho considerando que parte de la capacidad resistente de esta pieza tiene que emplearse en *autoestabilizarse* (función que en el caso de dos piezas con arriostramiento en cabeza y a la mitad queda a cuenta del material *adicional* empleado en el arriostramiento). En consecuencia, vemos que una pieza de doble altura e igual área, arriostrada sólo en cabeza, *no puede competir* con dos piezas arriostradas también a media altura: conforme aumenta la esbeltez, la capacidad resistente que puede dedicarse a equilibrar el peso P declina inevitablemente; de hecho, piezas muy esbeltas dedicarán prácticamente toda su resistencia a estabilizarse a sí mismas, y serán incapaces de resistir peso adicional.

Sin embargo, en cualquier pieza comprimida, con independencia de su esbeltez, la *tensión media* originada por la compresión a lo largo de la altura, es (al igual que en tracción):

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Esto es consecuencia de la definición de tensión: para que exista equilibrio la suma integral de las tensiones en cualquiera de las secciones de la pieza debe igualar al valor de la solicitación constante N. Pero en una pieza comprimida e imperfecta, para que el equilibrio pueda alcanzarse habrán de aparecer tensiones locales superiores a la media (según una distribución que no viene al caso detallar aquí, y que tienen como consecuencia tensiones menores que la media en otros puntos de la sección). Estas tensiones representan la contrapartida a las tensiones adicionales que hubieran aparecido en el arriostramiento a media altura, de haberse dispuesto.[13] En consecuencia, la *tensión máxima* que aparecerá en la sección a media altura será mayor que la predicha por la formula anterior. Los resultados experimentales muestran que esa ampliación de tensión puede estimarse mediante un *coeficiente de pandeo* ω que depende de la esbeltez y del material de la pieza ensayada. La pieza se puede considerar segura cuando esta tensión máxima,

[13] La diferencia entre una pieza comprimida y una traccionada es una diferencia de *distribución* de las tensiones a lo largo y ancho de su sección, pero la tensión media permanece constante. Esto es consecuencia de la definición matemática del valor medio de una función en un dominio, $\overline{\sigma} = \int \sigma \, dA \div \int dA = N \div A$.

bajo las cargas previsibles, no supera la tensión segura del material en compresión (la tensión media alcanzada por piezas poco esbeltas), y cumple además con las tolerancias geométricas habituales:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A}\omega \leq \mathrm{f} \tag{1.3}$$

en donde f debe interpretarse como la tensión segura del material *en compresión* (aunque en muchos materiales coincide con el valor en tracción, caso del acero). Esta fórmula debe sustituir a la empleada en tracción.[14] Los coeficientes de pandeo habituales para perfiles con imperfecciones 'normales' de fabricación, de acero ($\sigma_e = 260\,\mathrm{N/mm^2}$) y madera corrientes son:

Coeficiente de pandeo en compresión simple.

ω / Material	$\lambda = h/i$: 0	50	100	150	200	
Acero corriente	1	1,13	2,01	3,96	6,78	$\approx 1 + \left(\frac{\lambda}{100}\right)^3$ si $\lambda \leq 125$
Madera corriente	1	1,42	3	6,75	12	$\approx 1 + \left(\frac{\lambda}{70}\right)^2$ si $\lambda \leq 100$

Los coeficientes para la madera son en comparación mayores que los del acero debido a la menor rigidez del material (pueden emplearse también para el hormigón, como una primera aproximación). Los límites indicados para la esbeltez son los de validez de las fórmulas *aproximadas* en cada caso (las fórmulas 'exactas' son bastante más complicadas). Sin embargo, pueden considerarse también como límites razonables para el diseño: piezas de mayor esbeltez son bastante ineficaces y nada recomendables (aunque puede conseguirse que sean seguras y rígidas). Cada norma administrativa suele imponer límites semejantes a la esbeltez mecánica de cada tipo de piezas, aunque en general son más laxos que los considerados aquí. Existen diversas series de coeficientes semejantes a los de la tabla anterior. Cada serie corresponde en esencia a las imperfecciones iniciales que *estadísticamente* cabe esperar para cada tipo de perfil y material. Los valores que doy aquí son sólo orientativos, aunque tienen precisión suficiente para el diseño preliminar de piezas y perfiles corrientes.

1.2.1 Comprobación de piezas

La comprobación de la resistencia de piezas comprimidas se reduce a la aplicación de (1.3). Si la pieza resulta segura no colapsará por pandeo ni por aplastamiento bajo la carga nominal.[15]

[14] Otro modo de hacer frente al problema de medir la tensión máxima en piezas comprimidas consiste en reducir la tensión que resiste el material en compresión mediante un coeficiente de minoración de la resistencia, χ, que no es sino el inverso del coeficiente de pandeo, ω. La fórmula resulta ahora

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \mathrm{f} \cdot \chi = \frac{\mathrm{f}}{\omega}$$

Pero conceptualmente esta solución no es muy satisfactoria: la resistencia del material libre de inestabilidad es la que es (y lo mismo pasa con la tensión que resiste con seguridad). El coeficiente ω de *ampliación* de tensión es una propiedad de la pieza, de la forma de su sección, de su esbeltez y del material de que está hecha, y a ella debe quedar ligado. Una interpretación alternativa es que la pieza tiene una *área eficaz a compresión* menor que su área geométrica (que sería totalmente eficaz a tracción), de valor χA ó A/ω. En tal caso, podemos comprobarla operando con la tensión media producida por la carga sobre ese área eficaz:

$$\sigma = \frac{N}{\chi A} \leq \mathrm{f}$$

En todo caso ya se ve que ambos modelos son el mismo desde un punto de vista numérico.

[15] Esta sencilla formulación sólo se aplica a piezas como las del experimento: simplemente sujetas en sus extremos y con carga centrada en la dirección de la pieza. En otras situaciones la formulación se complica.

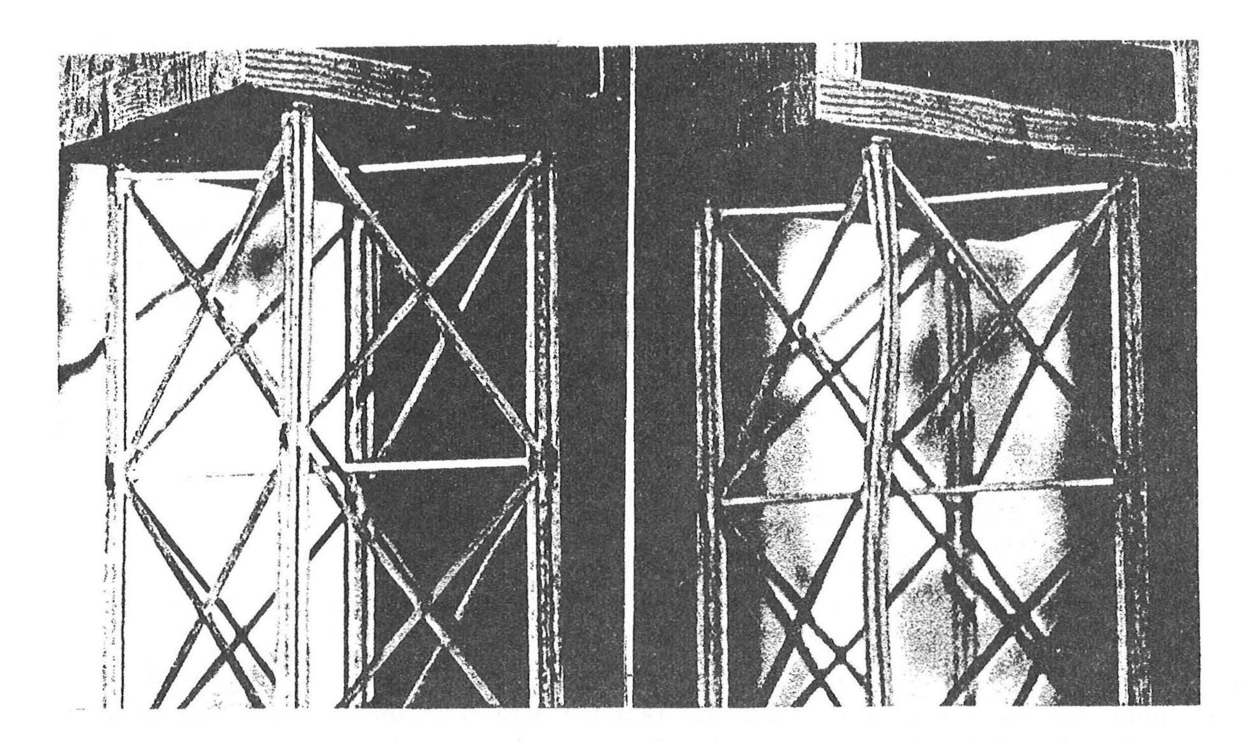


Figura 1.8: **Pandeo de una pieza en una estructura arriostrada**
A la izquierda se muestra la estructura con no mucha carga, a la derecha al borde del colapso. Puede apreciarse la extraordinaria curvatura de uno de los soportes.

En términos de rigidez, y supuesto que la pieza y la estructura a la que pertenezca son estables, el cálculo del acortamiento es similar a una pieza comprimida: la tensión media es simplemente $\sigma = N/\mathrm{A}$ y, en consecuencia, la deformación media a lo largo de la longitud es $\varepsilon = N/(\mathrm{EA})$, y el acortamiento total es $\Delta = N\mathrm{h}/(\mathrm{EA})$. La rigidez de la pieza es, como siempre, $k_{N\Delta} = \mathrm{EA/h}$. Debe notarse que está afirmación sólo puede hacerse para piezas cuya estabilidad y seguridad ha sido comprobada previamente, pues *en general* una pieza comprimida de gran esbeltez se combará, de manera que la descripción de su figura deformada (y por tanto de los desplazamientos de cualquiera de sus puntos) puede llegar a ser extraordinariamente complicada, véase la figura 1.8. Pero aquí no estamos interesados en piezas *en general*. Por el contrario sólo nos interesan las piezas aceptables para construir edificios, *cuyos desplazamientos deben ser pequeños*. Si la pieza cumple esta condición, y aunque en el proceso de carga cualquier imperfección inicial será ampliada, los desplazamientos totales serán varios órdenes de magnitud menores que las dimensiones geométricas y, en consecuencia, resultarán inapreciables: existen pero necesitaríamos delicados instrumentos de medida para 'verlos'. Las piezas aceptables en edificación pueden seguirse considerando rectas y perfectas a la hora de calcular su deformación, *aunque sabemos que no lo son.*

1.2.2 Diseño de piezas

Para el diseño de una pieza resistente a compresión, debe usarse (1.3) para obtener el área mínima con que debe dimensionarse. Sin embargo, la empresa no está exenta de dificultades. En efecto, despejando de (1.3) el área de la pieza tenemos:

$$A \geq \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{f}} \cdot \omega$$

Pero para averiguar el coeficiente ω tenemos que saber primero la esbeltez λ, es decir el radio de giro i, es decir el área A: nos encontramos en un círculo vicioso. Puede verse claramente si escribimos el coeficiente de pandeo como una función que depende (entre otras cosas) del área de la pieza:

$$A \geq \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{f}} \cdot \omega(A, i, \mathrm{h}) \tag{1.4}$$

Debido a que las funciones analíticas que representan los valores de ω son complicadas, se suministran en forma de tablas, y no es posible aquí obtener con facilidad una regla explícita de dimensionado. (Incluso con las fórmulas aproximadas dadas anteriormente la empresa no resulta fácil.)

Hay una dificultad adicional: el radio de giro (y por tanto, la esbeltez y ω) *depende* de la forma de la sección, además de depender de su área. La forma de la sección (y por tanto la relación entre A y el radio de giro i) tiene que elegirse *a priori*. Conforme la importancia de la compresión aumenta, deben preferirse las secciones con mayor radio de giro en relación a su área: formas que alejan el material del centro de gravedad de la sección, véase la figura 1.6.

Acotación de la solución

Una vez elegida la forma de la sección, el método general de solución de (1.4), seguro y parsimonioso, consiste en proceder por tanteos. Esa expresión se puede interpretar como una ecuación complicada para la que hay que encontrar la solución, A. Una cota inferior del área necesaria es la mínima en tracción, $A_i = \mathrm{N}/\mathrm{f}$ (o lo que es lo mismo, suponer que $\omega = 1$). Podemos ahora calcular, para esa sección, la esbeltez λ_i y el coeficiente de pandeo ω_i correspondientes a A_i. Un nuevo área A_s se obtiene entonces utilizando (1.4) con el valor ω_i, $A_s = \mathrm{N}\omega_i/\mathrm{f}$. El área buscada tiene que estar entre A_i y A_s. En efecto, ω_i es una cota superior del valor $\omega(A, i, \mathrm{h})$ puesto que corresponde a la esbeltez λ_i del mínimo área posible A_i, que será por tanto la *máxima* esbeltez para el tipo de sección elegido; como A_s se calculó con ω_i tiene que ser mayor que el área buscada. Además A_i resulta necesariamente insegura, mientras que A_s es segura (probablemente demasiado segura). Ahora se puede proceder iterativamente con una nueva conjetura sobre el valor del área, $A_p = (A_i + A_s) \div 2$, comprobando si el valor estimado para la tensión máxima con (1.3) supera o no la tensión segura: $\sigma = \mathrm{N}\omega_p/A_p$. Si resulta que A_p es insegura, el nuevo intervalo que contiene la solución es (A_p, A_s), en caso contrario la solución está en (A_i, A_p).

Ejemplo 1.2: Cálculo de un pie derecho de madera. *Diseñar la sección de un pie derecho de* 3 m *de altura, de madera y sección cuadrada, que tiene que soportar una carga vertical de* 200 kN. *La tensión segura de la madera en cuestión es* $\mathrm{f} = 10\,\mathrm{N/mm^2}$ *y el coeficiente de pandeo viene dado por* $\omega = 1 + (\lambda \div 70)^2$. *El radio de giro de un cuadrado de lado a respecto a su centro de gravedad es* $i = a/\sqrt{12} \approx 0{,}29a$. *Como* $A = a^2$ *resulta que* $i = 0{,}29\sqrt{A}$. ▽

Partiendo del área mínima para una pieza traccionada, y aplicando la regla enunciada se tienen los siguientes valores:

$$A_i = \frac{200\,\mathrm{kN}}{10\,\mathrm{N/mm^2}} = 20.000\,\mathrm{mm^2}; \quad i_i = 41\,\mathrm{mm}; \quad \lambda_i = \frac{3\,\mathrm{m}}{41\,\mathrm{mm}} = 73; \quad \omega_i = 2{,}10$$

$$A_s = \frac{200\,\mathrm{kN}}{10\,\mathrm{N/mm^2}} \times 2{,}10 = 42.041\,\mathrm{mm^2}$$

$$A_p = \frac{20.000\,\mathrm{mm^2} + 42041\,\mathrm{mm^2}}{2} = 31.020\,\mathrm{mm^2}$$

En la siguiente tabla figuran los resultados para cada iteración. Para cada valor de A_p *se realiza la comprobación del valor de la tensión máxima, tras calcular el radio de giro* i_p, *la esbeltez* λ_p, *y el coeficiente de pandeo* ω_p *para esa sección.*

A_i (mm^2)	20.000	31.020	31.020	31.020	32.398	33.087
A_s (mm^2)	42.041	42.041	36.531	33.776	33.776	33.776
A_p (mm^2)	31.020	36.531	33.776	32.398	33.087	33.432
λ_p	59	54	57	58	57	57
ω_p	1,71	1,60	1,65	1,68	1,67	1,66
$\sigma_{\max}$ (N/mm^2)	11	8,77	9,79	10,4	10,1	9,93

Las soluciones recuadradas son las seguras para esta pieza. Nótese que desde la primera iteración y gracias al valor resultante para $\sigma_{\max}$, sabemos que una solución muy próxima a la exacta debe ser sólo ligeramente superior a 31.020 mm^2. *En vez de aplicar la regla de la semisuma de los valores extremos al nuevo intervalo (A_i, A_s), podríamos haber aumentando el último valor de A_p en la misma proporción que hay entre su tensión máxima y la segura (incluso un poco menos pues al aumentar la sección disminuye la esbeltez y el coeficiente de pandeo). Así* 11 N/mm^2 ÷ 10 N/mm^2 = 1,1 *y* 31.020 mm^2 × 1,1 = 34.122 mm^2, *un valor* seguro *muy cercano ya a la mejor solución obtenida tras siete iteraciones. El área de* 33.432 mm^2 *corresponde a un cuadrado de* 182 mm *de lado. En carpintería de madera no se puede pedir mucha más precisión que el centímetro, de manera que elegiremos un lado de* 190 mm, *que es seguro y práctico, con una sección de* 36.100 mm^2. *¡Las seis última iteraciones conducen a una precisión que no puede llevarse a término! (Nótese que un lado de* 180 mm *hubiera conducido a un diseño inseguro.)* □

Resistencia de piezas. Tablas

El método anterior resulta desesperante pero puede ser adecuado cuando hay que diseñar *una* pieza. Pero en edificación convencional resulta habitual tener que diseñar decenas de piezas: los soportes del edificio. Si, además, los calibres o escuadrías que pueden disponerse están limitados (por los límites impuestos por los catálogos comerciales, etc), puede ocurrir que el *número de soluciones* sea menor que el *número de problemas*, es decir, de piezas a diseñar. Entonces resulta mucho más eficaz calcular el rango de validez de cada solución (cada sección del catálogo comercial) y después, por simple inspección, asignar a cada pieza una de las soluciones del catálogo. Si todas las piezas tienen la misma longitud de referencia, este método resulta siempre preferible, pues sólo hay que realizar un cálculo directo de la *capacidad resistente segura a compresión*, R, para cada sección y longitud, y luego elegir la *solución* para cada *problema* con:

$$N \leq \mathrm{R} = \frac{\mathrm{Af}}{\omega(\mathrm{h},\, i(\mathrm{A}))} \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.3: Capacidad resistente de un pie derecho de madera. *Elegir el grueso del pie derecho del ejemplo 1.2 entre los valores de la serie:* 100, 110, 120, ... mm ▽

Lo primero es estimar el orden de magnitud del grueso necesario. Como en el ejemplo anterior, podemos calcular el límite inferior para el área en 20.000 mm^2, *que corresponde a un grueso de* 141 mm. *Ajustado a la serie de valores, conduce a un grueso mínimo de* 150 mm, *valor por el que debemos comenzar el cálculo de las capacidades resistentes para* 3 m *de longitud con (1.5):*

a(mm)	150	160	170	180	190
i(mm)	43	46	49	52	55
λ	69	65	61	58	55
ω	1,98	1,86	1,76	1,68	1,61
R(kN)	114	138	164	193	224

Se necesitan cinco iteraciones para encontrar la solución aceptable y ajustada de 190 mm *de lado, algo menos que las que necesitamos en el ejemplo 1.2. Incluso podríamos haber llegado con mayor celeridad si hubiéramos estimado el grueso conjeturando un coeficiente de pandeo. Esto es muy natural, porque como sabemos que ω será estrictamente mayor que uno, resulta demasiado inocente comenzar con $\omega = 1$. Para conjeturar un coeficiente de pandeo podemos usar el valor correspondiente al área mínima necesaria por*

tracción: así para el grueso mínimo de 150 mm, $\omega = 1{,}98$*; calculando el área necesaria con* $\omega = 2$*, se tiene:*

$$A = \frac{200\,\mathrm{kN} \times 2}{10\,\mathrm{N/mm^2}} = 40.000\,\mathrm{mm^2}$$

lo que conduce a un valor de a*,* ajustado a la serie, *de* 200 mm. *Podemos comenzar por ahí:*

a(mm)	200	190	180
i(mm)	58	55	52
λ	52	55	58
ω	1,55	1,61	1,68
R(kN)	258	224	193

Hay varias cosas que subrayar. Como con un grueso de 200 mm *tenemos más capacidad que la necesaria, tenemos que ir disminuyendo el grueso (en vez de aumentarlo como en el cálculo anterior). Los cálculos para el grueso de* 180 mm *son necesarios para cerciorarnos de que el grueso de* 190 mm *es el mínimo ajustado a la serie que resulta seguro. En todo caso hemos necesitado sólo cuatro iteraciones para determinar una solución aceptable y lo más estricta que las condiciones de partida permitían.*

Este método, de todas formas, muestra su eficacia cuando son varios (y no uno) los pies derechos que tengamos que diseñar: las tablas anteriores sirven para elegir gruesos seguros de todos los pies derechos de madera corriente que pandean sobre 3 m *de altura con compresión centrada.* □

Una regla de dimensionado

Las ecuaciones (1.4) y (1.5) *no son* reglas de dimensionado de piezas comprimidas. Con ellas podemos comprobar o calcular la resistencia a compresión simple de una pieza, pero ninguna nos suministra el área necesaria para resistir una compresión dada. Y esto último *es* el objetivo del diseño de estructuras.

Para destilar una regla *aproximada* para el dimensionado de secciones seguras a compresión podemos partir de (1.4). Debido a su carácter aproximado, la regla no exime de la comprobación con (1.3), pues en muchas ocasiones su simple aplicación conducirá a una sección *insegura*. Pero, como veremos, suministra una sección próxima a la segura más ajustada y, partiendo de ella se agilizan notablemente los cálculos en las situaciones habituales.[16]

La ecuación (1.4) puede escribirse como:

$$A \geq \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{f}}(\omega - 1) = A_t + A_t(\omega - 1)$$

en donde A_t representa el área necesaria en una pieza traccionada análoga. En principio no parece que ganemos mucho con el cambio, pero al menos hemos aislado en el último monomio la *diferencia* en el dimensionado de piezas comprimidas. Además el factor $\omega - 1$ depende esencialmente de una potencia de la esbeltez, es decir de la altura de la pieza y de su radio de giro, *y no depende* de la magnitud de la compresión. Esto sugiere utilizar como regla aproximada de dimensionado expresiones del tipo:

$$A\mathrm{f} \approx \mathrm{N} + \alpha \mathrm{h}^{\beta}$$

en la que el primer término representa la capacidad resistente necesaria para hacer frente a la tensión media, mientras que el segundo representa el hecho de que en compresión la distribución de tensiones está lejos de ser uniforme (lo que depende sobre todo de la geometría de la pieza, no de la intensidad de la compresión). Los coeficientes α y β habría que determinarlos para cada tipo de sección y material, pues son los lugares donde poder reflejar el resto de características pertinentes (radio de giro, módulo de Young, etc). Como aquí estamos interesados en una regla

[16] La inclusión de esta regla aquí debe agradecerla a la tozuda insistencia del profesor José Luis de Miguel.

sencilla podemos contentarnos[17] con $\beta = 2$. Los valores de α dependen *esencialmente* de la razón entre el radio de giro y el área de la sección, y es una peculiaridad de la forma de esta última. En el siguiente cuadro figuran valores tentativos para secciones de madera y acero corrientes, tal y como los empleados en los ejemplos anteriores:[18]

Regla de dimensionado en compresión simple.								
$e = \dfrac{i}{\sqrt{A}}$		0,14	0,20	[0,29]	0,41	0,58	[0,82]	1,15
α ($\mathrm{kN/m^2}$)	madera	60	30	[17]	10	5	3	1,5
	acero	—	200	100	50	25	[12,5]	6

En definitiva la regla queda como:

$$A \approx \frac{1}{\mathrm{f}}\left(\mathrm{N} + \alpha \mathrm{h}^2\right) \tag{1.6}$$

Tómese buena nota de que α *tiene* unidades: las indicadas en el cuadro.

El índice $e = i/\sqrt{A}$ es una medida de la eficacia de la *forma* de la sección a la hora de resistir compresiones. Cuanto mayor es, mayor radio de giro (a igualdad de área) y, en consecuencia, menor esbeltez, menor coeficiente de pandeo, y menor repercusión de la inestabilidad en compresión. Por tanto, el factor α (que representa esencialmente la capacidad resistente *adicional* requerida para evitar el pandeo a igualdad de altura de la pieza) crece según decrece la eficacia de la sección. Los valores de α conducen a soluciones *cercanas* a la segura para esbelteces mecánicas moderadas ($\lambda \leq 100$ en madera y menor que 125 en acero), pero puede tratarse tanto de soluciones seguras como inseguras (lo que intento subrayar sustituyendo el signo $\geq$ de la expresión de partida por el signo $\approx$ en la regla).

Los valores recuadrados corresponden a una sección cuadrada en el caso de la madera y pueden servir como referencia: en el extremo izquierdo se sitúan los tablones (con pequeño radio de giro en la dirección del espesor), mientras en el derecho se sitúan las secciones huecas, bastante más eficaces (pero difíciles de fabricar).

En el caso del acero he recuadrado los valores correspondientes a tubos huecos de pared ni muy gruesa ni muy fina, que pueden servir como referencia. Los perfiles en forma de I, U, L o H tienen una eficacia e en la banda 0,41–0,58; los mejores tubos pueden superar con facilidad el valor 0,82; los peores perfiles comerciales rara vez bajan hasta comportarse como una sección cuadrada maciza ($e = 0{,}29$). Con $e = 0{,}14$ la regla no resulta aplicable, aunque en cualquier caso es *muy ineficaz* resistir compresión con piezas macizas de acero ($e \leq 0{,}29$).[19]

La comparación de los valores de α para el acero y la madera podría sugerir que este último material es más eficaz a la hora de resistir compresiones con secciones de idénticas características, pues a igualdad de altura hay que 'pagar' menos 'compresión' adicional con él, una conclusión que parece contradecir las conclusiones experimentales de §**1.2** en la página 14. Pero no es cierto, porque los valores no corresponden a la misma tensión y *no son* del material, sino de la pieza. Un índice más pertinente (aunque no del todo satisfactorio) es la razón entre α y la tensión segura del material. Por ejemplo, para secciones cuadradas, los valores de α/f son del

[17]De hecho, no se trata del mejor valor: tanto en madera como en acero corrientes, para sección cuadrada se obtiene mayor precisión con $\beta \approx 1{,}65$, aunque el rango de variación del 'mejor' β varía mucho con el tipo de sección, al menos entre 1,4 y 2,4. El valor elegido resulta de un compromiso entre la precisión y la belleza.

[18]Las técnicas de análisis para justificar estos resultados quedan fuera del alcance de estas páginas. En esencia consisten en realizar una estadística del comportamiento 'habitual' de la ecuación (1.4).

[19]Los valores del cuadro concuerdan satisfactoria y afortunadamente con los valores de α recomendados por el profesor José Luis de Miguel, 40 $\mathrm{kN/m^2}$ para perfiles débiles (perfiles H, etc) y 10 $\mathrm{kN/m^2}$ para los fuertes (tubos huecos).

orden 1.700 mm^2/m^2 para la madera y 300 mm^2/m^2 para el acero, lo que indica que en el límite de la resistencia, la cantidad bruta de material dedicada a la estabilidad de la pieza de madera es como seis veces la de acero. Esto está cualitativamente en consonancia con la mayor rigidez de este último. Sin embargo, los mayores valores de α de las secciones de acero (a igualdad de todo lo demás), significan que el resultado neto de la mayor rigidez y del *mayor límite elástico* del acero es desfavorable: la ampliación de tensión es mayor en el caso del acero cuando comparamos secciones del mismo tipo, capaces de resistir la misma compresión. La explicación ha de buscarse en los valores del límite elástico (o de la tensión segura): cuanto mayores, más perceptibles son los efectos del pandeo. Aunque una indagación de detalle queda fuera del alcance de este texto, puede razonarse como sigue: a igualdad de módulo de rigidez (y, por tanto, de carga crítica *de la pieza* a igualdad de sección), mayores tensiones seguras permiten diseños capaces de resistir cargas más cercanas a su crítica y que, por tanto, experimentarán también mayores ampliaciones de deformación y tensión en la búsqueda de su posición de equilibrio. La conclusión es que, para resistir compresiones y fijado el módulo de Young, no compensa utilizar un material de mayor límite elástico.[20]

La regla de dimensionado subraya cual es la variable fundamental en la resistencia a compresión: la altura en que la pieza puede pandear libremente, libre de arriostramientos.

Ejemplo 1.4: Diseño de un pie derecho de madera. *Elegir el grueso del pie derecho del ejemplo 1.2 entre los valores de la serie:* 100, 110, 120, ... mm ▽

Conforme a las instrucciones para el uso de (1.6), elegimos $\alpha = 17$ *y como primera aproximación obtenemos:*

$$A \approx \frac{200\,\mathrm{kN} + 17\,\mathrm{kN/m^2} \cdot 9\,\mathrm{m^2}}{0{,}01\,\mathrm{kN/mm^2}} = 35.300\,\mathrm{mm^2}$$

que corresponde a un lado ajustado al catálogo de 190 mm. *Mediante (1.3) comprobamos que la tensión máxima resultante es* 8,89 N/mm^2, *menor que la segura pero cercana a ella. La regla de dimensionado nos ha proporcionado directamente* en este caso *la solución buscada. En otros se precisaría todavía continuar la búsqueda de la solución con cualquiera de los métodos anteriores.* □

Ejemplo 1.5: Diseño de un soporte metálico. *Diseñar un soporte de* 3 m *de altura, de acero y sección cilíndrica hueca, que tiene que soportar una carga vertical de* 200 kN. *La tensión segura del acero en cuestión es* $f = 180\,\mathrm{N/mm^2}$ *y el coeficiente de pandeo viene dado por* $\omega = 1 + (\lambda \div 100)^3$. *Los perfiles disponibles y sus características figuran en la siguiente tabla.*

Diámetro (mm)	90	100	125	155	175
Área (mm^2)	819,5	913,7	1.519,8	2.355	2.669
Radio de giro (mm)	30,78	34,31	42,8	53,06	60,13

▽

Podemos comenzar por aplicar la regla (1.6) con $\alpha = 12{,}5\,\mathrm{kN/m^2}$*:*

$$A \approx \frac{200\,\mathrm{kN} + 12{,}5\,\mathrm{kN/m^2} \times 9\,\mathrm{m^2}}{0{,}18\,\mathrm{kN/mm^2}} = 1.736\,\mathrm{mm^2}$$

Puesto que la regla es una aproximación elegimos el tubo de 125 mm, *con el área más* cercana *a la sugerida por la regla. Calculando su capacidad resistente sobre* 3 m *de altura, el lector debería llegar a la conclusión de que llega hasta* 203 kN, *justo lo que necesitamos.*

(Podríamos habernos ajustado al catálogo por exceso y haber elegido el tubo de 155 mm. *Pero no hubiera sido buena idea: la esbeltez de este tubo sobre* 3 m *de altura es de* 57, *el coeficiente de pandeo llega a* 1,18 *y la capacidad resistente es de* 359 kN, *bastante más de lo necesario.)*

[20] Está afirmación puede hacerse en otros contextos del diseño de estructura en los que la deformación sea determinante en la aceptación de un diseño: aunque coloquialmente se da más 'valor' a los materiales más resistentes, presentan una clara desventaja: trabajando con su máxima tensión admisible (la segura) tienen que deformarse más para resistir lo mismo. A pareja conclusión ya habíamos llegado al discutir el área necesaria en arriostramientos, véase el comentario a la última regla de diseño en la página 12.

Podríamos haber usado mejor la regla de percatarnos que estos tubos tienen una eficacia e mayor que la unidad. En consecuencia el valor de $12{,}5\,\mathrm{kN/m^2}$ *para* α *resulta pesimista en este caso. Con* $\alpha = 6\,\mathrm{kN/m^2}$*, la regla predice una sección de* $1.411\,\mathrm{mm^2}$*. Si de nuevo escogemos el tubo más cercano, nos encontramos otra vez con el tubo de* $125\,\mathrm{mm}$*. Este criterio de 'cercanía' es lo que mejor funciona: cualquier valor de* α *entre* 6 *y* $12{,}5\,\mathrm{kN/m^2}$ *conduce a la solución buscada.* □

Ejemplo 1.6: Crítica de diseños. *Comparar y criticar las dos soluciones de los dos ejemplos anteriores.* ▽

Nos limitaremos a una crítica estructural dejando de lado una posible e interesante crítica económica. La tensión máxima en el caso de la sección de madera es:

$$\sigma_{\mathrm{max}} = \frac{200\,\mathrm{kN}}{36.100\,\mathrm{mm}^2} \cdot 1{,}61$$

mientras que en el caso de la de acero es:

$$\sigma_{\mathrm{max}} = \frac{200\,\mathrm{kN}}{1.520\,\mathrm{mm}^2} \cdot 1{,}34$$

y en los coeficientes de pandeo puede 'leerse' directamente la 'eficacia' de cada solución: mientras la pieza de madera dedica un $0{,}61/1{,}61 = 38\%$ *de su capacidad a autoestabilizarse, la pieza de acero sólo necesita un* $0{,}34/1{,}34 = 26\%$*. La confluencia de distintos factores (la diferencia en el tipo de sección y en la rigidez del material, sobre todo) conducen a una solución 'mejor' en el caso de la pieza de acero. Pero, de todas formas, no se trata de una diferencia 'decisiva': ambos diseños son dignos de consideración para la solución de este problema.* □

Recomendaciones de diseño

Dada la importancia de la esbeltez en el pandeo, deben evitarse piezas comprimidas de mucha esbeltez. Hay muchas razones para ello, pero la fundamental es que una pieza muy esbelta dedicará una fracción muy importante de su resistencia a autoestabilizarse. De este modo, se desperdicia el material, que no puede emplearse en resistir carga.[21] Una regla conservadora pero apropiada a la mayoría de los casos prácticos es limitar la esbeltez mecánica por debajo de 100. (Las regulaciones administrativas permiten esbelteces más elevadas según el tipo de pieza que se considere.) La esbeltez se reduce de muchos modos: las más evidentes son disponer arriostramientos en puntos intermedios y elegir la forma de la sección de modo que se aleje el material de su centro de gravedad. La regla (1.6) sugiere otra forma: puesto que *esencialmente* el 'coste' de la inestabilidad sólo depende de la altura y de la forma de la sección, será independiente de la compresión: si concentramos cargas (disminuyendo el número de piezas comprimidas) aumentamos la compresión nominal, N, y la importancia relativa de la inestabilidad, $\alpha \mathrm{h}^2/\mathrm{N}$, disminuye.

La calidad de un diseño a compresión puede estimarse de un vistazo mediante el factor $\alpha \mathrm{h}^2$ de (1.6), representativo de la ampliación de las tensiones de compresión 'generada' por el propio diseño (con independencia de la compresión requerida por el equilibrio). Sugiero un criterio de calidad tentativo: αh^2 no debiera ser mayor que la propia compresión N. De ser así debiera modificarse la forma de la estructura.

[21] Esta observación da lugar a una regla para la crítica en arquitectura: en un edificio, una columna muy esbelta mecánicamente *casi con certeza que no soporta apenas carga* aunque pueda dar esa impresión en apariencia: está ahí *por sí misma*, para el ornato del edificio, no para su resistencia.

2 Estructuras comprimidas

Tras la discusión precedente podemos contestar en detalle a la pregunta acerca de cómo analizar estructuras comprimidas, formadas por piezas verticales que soportan un cuerpo indeformable colocado sobre ellas, véase la figura I en la página 3.

1. El análisis isostático o hiperestático en período lineal se efectúa exactamente igual que si se tratara de cables traccionados. El análisis de acortamientos, y de los desplazamientos a que dan lugar, se reducen a la ecuación de compatibilidad ya empleada para cables (cf. $\mathcal{ESD}$:30–32). Para este análisis simplemente cambian de signo las distintas magnitudes.

2. La comprobación de la resistencia de las piezas comprimidas, pies derechos o soportes, debe incluir una reserva de resistencia para su propia estabilidad y *no puede llevarse a cabo con el formulismo empleado para la tracción.* Está es la novedad detallada en §**1.2**. En consecuencia, las tensiones de trabajo a compresión son inferiores a las de piezas análogas traccionadas. Además, debido a esa reserva de resistencia no es posible contar (en principio) con la resistencia adicional derivada del período de cedencia (la estabilidad de la pieza tendría que asegurarse con argumentos más complicados que los empleados hasta aquí, válidos sólo para el período lineal).

3. Como segunda novedad, las estructuras comprimidas deben arriostrarse a fin de asegurar la estabilidad global de la estructura (que no queda asegurada por la estabilidad de sus piezas consideradas aisladamente). Para ello es necesario disponer arriostramientos en forma de piezas específicas, con rigidez y resistencia suficiente como para asegurar que el colapso de la estructura no se producirá por su inestabilidad general.[1]

2.1 Arriostramientos de estructuras

Los edificios habituales son estructuras comprimidas: se erigen sobre su plano de apoyo, de manera que los pesos están siempre por encima (y no por debajo como es el caso de pesos colgados de cables). En consecuencia *deben* contar con elementos que aseguren su estabilidad. El más evidente (según la discusión precedente) es el arriostramiento (pero no es el único: la estructura podría autoestabilizarse del mismo modo que una pieza comprimida lo hace). Sin embargo, ahora el arriostramiento debe bajar hasta el suelo (que es el único plano de apoyo con que contamos) y no puede ser horizontal como en §**1.1**, véase la figura 2.1.

Considerado en planta y como un cuerpo indeformable, el edificio tiene tres grados de libertad posibles, representados, por ejemplo, mediante dos desplazamientos ortogonales y una

[1] La asimetría entre tracción y compresión queda bien patente en el hecho de que la seguridad de una estructura de cables no requiere como condición necesaria la seguridad de cada uno (análisis en rotura, cf. $\mathcal{ESD}$:28–31,33[nota 22]), mientras que por el contrario, la estabilidad de una estructura de pies derechos requiere la estabilidad de cada uno de ellos y *además* la estabilidad del conjunto.

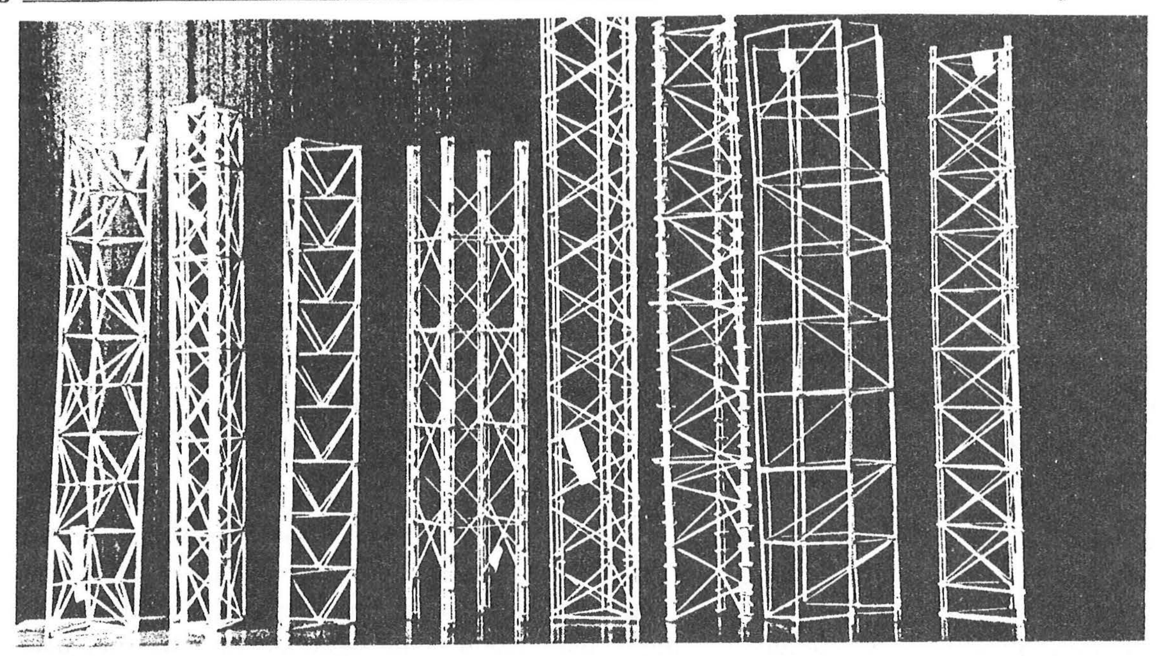


Figura 2.1: **Arriostramiento de estructuras**

rotación. Para asegurar su estabilidad hay que contar *como mínimo* con tres planos verticales arriostrados no coincidentes en la misma vertical.[2] Cualquier movimiento o imperfección accidental puede descomponerse en tres movimientos según los tres planos arriostrados y, supuesto que el dimensionado de los arriostramientos dispuestos sea suficiente, la ampliación del movimiento estará limitada a valores tolerables. Resulta recomendable usar planos ortogonales y disposiciones simétricas (lo que en la mayoría de los casos sugiere usar cuatro planos, paralelos dos a dos).

2.2 Arriostramientos en diagonal

Aunque son posibles otras formas, la disposición de dos cables en cruz (*cruz de San Andrés*, véase el primer modelo de la figura 2.1 a la derecha) es uno de los modelos más eficaz de arriostramiento (tal y como se argumentará después). Según el desplome sea a un lado u otro, uno de los cables se tracciona y el otro se comba (*pandea*) sin oponer apenas resistencia.

El análisis de un arriostramiento en diagonal sigue los mismos argumentos que el de un arriostramiento horizontal, aunque ahora podemos aprovechar con ventaja todas las conclusiones obtenidas con anterioridad. Para evitar complicaciones innecesarias analizaremos primero el caso de un único soporte, y generalizaremos después las conclusiones obtenidas para este modelo simple, véase la figura 2.2.

Partimos de una imperfección inicial, η_0, en *la cabeza* del soporte, no mayor que la tolerancia de fabricación, η_{tol}. Respecto a su base, la perturbación inicial es el momento $P\eta_0$. La diagonal traccionada en el mismo plano que el desplome, formando inicialmente un ángulo α con la horizontal, se opondrán a la perturbación en la medida en que se alargue con una deformación ε y un alargamiento $\Delta = \varepsilon d$, siendo d su longitud. El alargamiento Δ de la diagonal amplia el desplome en una cierta cantidad δ. Si se alcanza una posición de equilibrio, el desplome total al final será $\eta = \eta_0 + \delta$.

[2]En el caso de una pieza lineal, su cabeza sólo tiene dos grados de libertad para desplomarse, por ello sólo se necesitan dos planos ortogonales arriostrados.

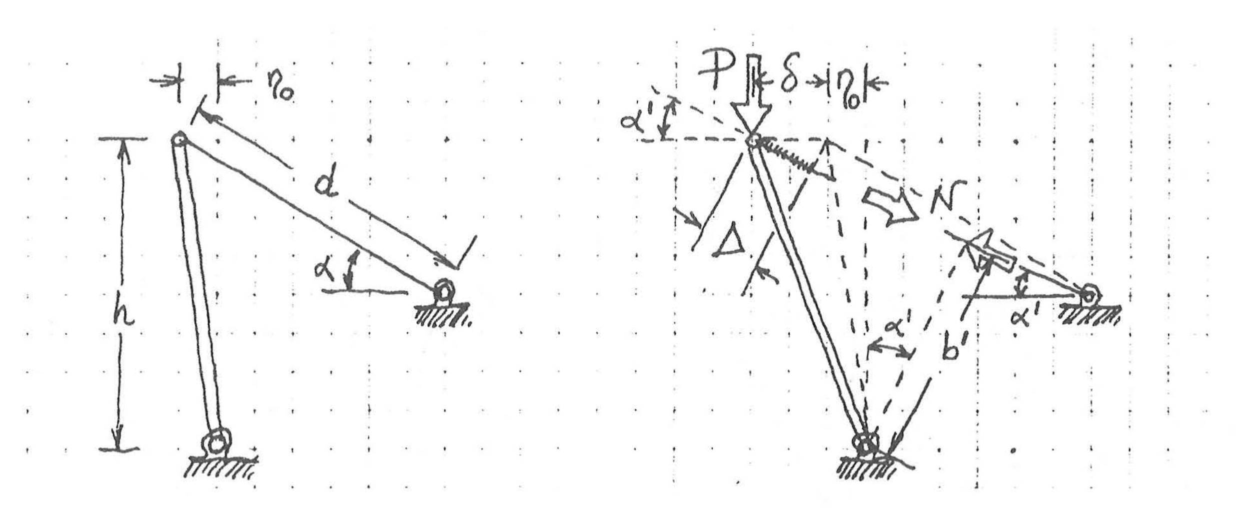


Figura 2.2: **Arriostramientos en diagonal**

La relación entre el alargamiento, Δ, y la ampliación del desplome, δ, es ahora algo más complicada que en el caso de un arriostramiento horizontal: $\Delta = \delta \cos \alpha'$, siendo α' el ángulo de la diagonal con la horizontal en la posición de equilibrio. Bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños podemos suponer $\alpha' \approx \alpha$. La tracción en la diagonal será $N = k_{N\Delta}\Delta$. Su efecto estabilizador se concreta en su momento respecto al pie del soporte: Nb'. Si los desplazamientos son pequeños, una buena aproximación[3] es $b' \approx h \cos \alpha$. La ecuación de equilibrio en la posición final se puede escribir aproximadamente como $P\eta \approx Nh \cos \alpha$, lo que determina el valor de la solicitación de la diagonal en la posición de equilibrio definida por η:

$$N \approx P \frac{\eta}{h} \frac{1}{\cos \alpha} \tag{2.1}$$

Puesto que η/h estará limitado por el requisito de rigidez y la tolerancia de fabricación a valores no mayores que $(\eta_{\text{tol}} + \delta_{\text{tol}})/h$, la solicitación será como mucho una cierta fracción del peso, *tanto mayor cuanto mayor sea* α. Vemos que el arriostramiento horizontal requiere el mínimo esfuerzo, y dado que en edificios tendremos necesariamente arriostramientos inclinados, requerirán tanto más esfuerzo cuando su inclinación más se acerque a la vertical.

Podemos escribir la ecuación de equilibrio en función de la imperfección inicial y del desplazamiento adicional:

$$P(\eta_0 + \delta) \approx k_{N\Delta} \cdot \delta \cos \alpha \cdot h \cos \alpha = k_{N\Delta} \cdot h \cos^2 \alpha \cdot \delta$$

lo que permite expresar la ampliación del desplome, es decir, el desplazamiento de la estructura, δ, en función de la imperfección inicial y de la rigidez de la diagonal:

$$\delta \approx \eta_0 \frac{P}{k_{N\Delta} \cdot h \cos^2 \alpha - P} = \eta_0 \frac{P}{\text{P}_{\text{cr}} - P} \leq \eta_{\text{tol}} \frac{P}{\text{P}_{\text{cr}} - P} \tag{2.2}$$

Si el peso tiende al valor $k_{N\Delta} \cdot h \cos^2 \alpha$, el denominador tiende a cero y la ampliación del desplome tiende a crecer indefinidamente: volvemos a encontrarnos con una situación crítica. La carga crítica de la estructura P_{cr} es ahora $k_{N\Delta} \cdot h \cos^2 \alpha$ (la carga crítica de una arriostramiento horizontal resulta del caso particular $\alpha = 0$). Si $P > \text{P}_{\text{cr}}$, la ampliación es... ¡negativa! Esto no tiene

[3] Mediante una análisis más exacto puede demostrarse sin dificultad que la aproximación es excelente si η es pequeño. Sin embargo, debe notarse que la aproximación es esencialmente *insegura*. En efecto, b' es estrictamente menor que $h \cos \alpha$ y, por tanto, la aproximación usada en el texto *sobrestima* (aunque muy poco) la acción estabilizadora de la diagonal.

sentido físico y muestra que la expresión anterior está limitada a la descripción de situaciones *de equilibrio* y ésta *no es una de ellas* (cf. la nota 7 en la página 10); la conclusión debe ser la ya conocida: si $P \geq \mathrm{P_{cr}}$ la situación se torna inestable.

El desplome en el equilibrio es simplemente $\eta_0 + \delta$, de manera que empleando la expresión obtenida para δ:

$$\eta \approx \eta_0 \frac{\mathrm{P_{cr}}}{\mathrm{P_{cr}} - P} \leq \eta_{\mathrm{tol}} \frac{\mathrm{P_{cr}}}{\mathrm{P_{cr}} - P} \tag{2.3}$$

Nótese que las expresiones del desplome total o de su ampliación son formalmente las mismas cuando se expresan en función de la carga y de la crítica del diseño, con independencia de que se trate de geometrías o valores de la carga crítica distintos, cf. la ecuación (2.2) con la (1.2), y la (2.3) con la (1.1). Esta conclusión puede generalizarse: en cada tipo estructural, por complicado que pueda ser, se encuentra un valor de la carga que *es crítico* respecto a su estabilidad. Los desplazamientos totales o su ampliación se expresan en función de ese valor del mismo modo que lo hacemos aquí para un tipo estructural sencillo como la diagonal.

La ampliación del desplome se puede expresar en función de la deformación de trabajo de la diagonal:

$$\delta \approx \frac{\Delta}{\cos\alpha} = \frac{\varepsilon d}{\cos\alpha} \leq \delta_{\mathrm{tol}} \tag{2.4}$$

donde queda expresado el requisito de rigidez como una limitación absoluta a la ampliación del desplome. De aquí podemos determinar la máxima deformación compatible con el requisito de rigidez:

$$\varepsilon \approx \frac{\delta}{d}\cos\alpha = \frac{\delta}{h}\frac{h}{d}\cos\alpha \leq \frac{\delta_{\mathrm{tol}}}{h}\frac{h}{d}\cos\alpha \tag{2.5}$$

expresión que he manipulado para que aparezcan tres factores: la razón entre el desplazamiento tolerable y la altura de la pieza; la razón entre ésta última y la longitud de la diagonal; y finalmente la inclinación del arriostramiento. Nótese que el valor δ_{tol}/h viene determinado por las condiciones particulares de cada caso.

Finalmente, el arriostramiento está también sujeto al requisito de resistencia que limita su deformación a como mucho la segura del material en tracción, $\varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{f}}$.

Podemos estimar con facilidad la solicitación en los arriostramientos seguros y rígidos (es decir, aceptables). Para ello partimos del valor general de la solicitación dado por (2.1). Puesto que el desplome total es $\eta = \eta_0 + \delta$, la imperfección inicial está limitada por la tolerancia y la ampliación del desplome por el desplazamiento tolerable, podemos escribir:

$$N = P\frac{\eta_0 + \delta}{h}\frac{1}{\cos\alpha} \leq P\frac{\eta_{\mathrm{tol}} + \delta_{\mathrm{tol}}}{h}\frac{1}{\cos\alpha}$$

que rige los valores de solicitación que cabe esperar en arriostramientos aceptables. Vemos otra vez que, a igualdad de todo lo demás, la estabilidad requiere mayores solicitaciones en los arriostramientos más cercanos a la vertical. Finalmente podemos relacionar la solicitación con la deformación de la diagonal, puesto que $\delta = \varepsilon d / \cos\alpha$:

$$N = P\left(\frac{\eta_0}{h} + \varepsilon\frac{d}{h}\frac{1}{\cos\alpha}\right)\frac{1}{\cos\alpha}$$

y también el área necesaria en la diagonal:

$$A = \frac{P}{\varepsilon \mathrm{E}}\left(\frac{\eta_0}{h} + \varepsilon\frac{d}{h}\frac{1}{\cos\alpha}\right)\frac{1}{\cos\alpha} \tag{2.6}$$

Ciertamente en las dos últimas expresiones debe asegurarse que la deformación de trabajo ε cumple con (2.5) y con el requisito de resistencia, puesto que estas expresiones presuponen que el arriostramiento es aceptable.

La comprobación o el diseño de arriostramientos diagonales sigue, paso por paso, las reglas empleadas para los horizontales (cf. la página 11 y ss.). Al igual que para estos, el análisis está sujeto a la tolerancia sobre la imperfección inicial (η_{tol}), al requisito de rigidez (límite sobre la ampliación del desplome, δ_{tol}) y a la resistencia del material de la diagonal (límite sobre ε, ε_{f}).

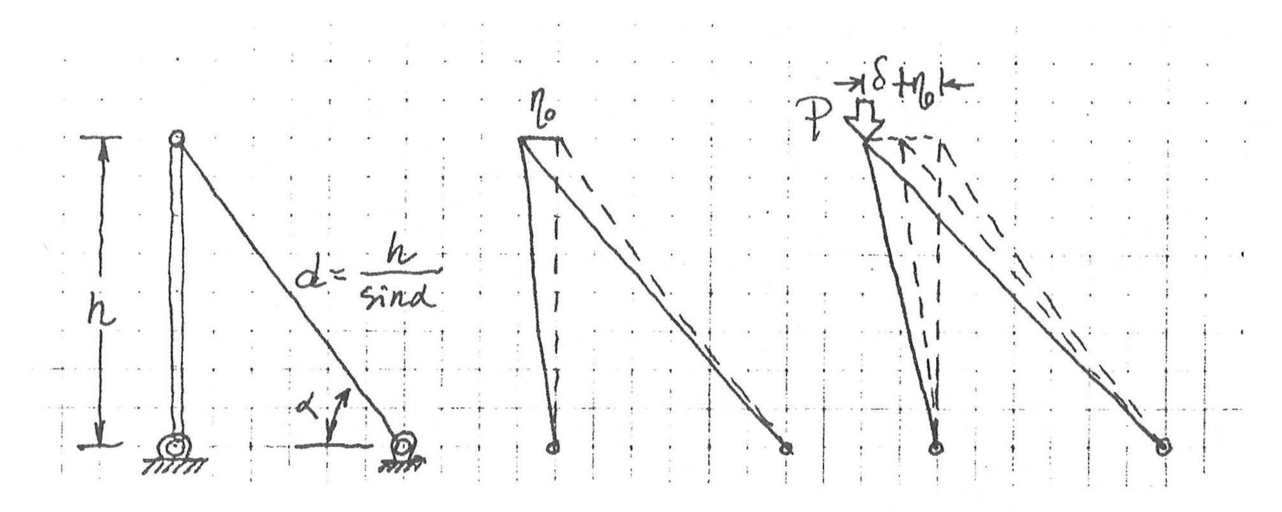


Figura 2.3: **Diseño de arriostramientos en diagonal**

Ejemplo 2.1: Diseño de arriostramiento de acero en diagonal. *Veamos como derivar una regla de diseño para arriostramientos diagonales en las mismas condiciones que en el ejemplo 1.1 de la página 13. Nos concentraremos en diagonales ancladas en el mismo plano de apoyo que el soporte, véase la figura 2.3. El límite sobre la ampliación del desplome permiten destilar un primer límite sobre ε a partir de (2.5):*

$$\varepsilon \leq (2\,\mathrm{mm/m}) \cdot \frac{\mathrm{h}}{d} \cos\alpha$$

Pero, además, un arriostramiento eficaz debe trabajar con la deformación segura del material, ε_{f}, es decir, $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{f}}$. Ambas condiciones imponen un límite a la geometría de la diagonal (d y α). Puesto que la diagonal está anclada a la misma altura que el pie del soporte, $\mathrm{h}/d = \sin\alpha$, y teniendo en cuenta que $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{f}} \leq 2\,\mathrm{mm/m} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha; \qquad \sin 2\alpha \geq 2 \times \frac{\varepsilon_{\mathrm{f}}}{2\,\mathrm{mm/m}} = 0{,}86$$

Esta condición se cumple si $30° \leq \alpha \leq 60°$.[4]

Dentro de estos límites para el ángulo, el desplome en el equilibrio, δ/h, es siempre no mayor que $4\,\mathrm{mm/m}$ (el mínimo valor es $3{,}72\,\mathrm{mm/m}$ para $45°$); de manera que a partir de (2.1):

$$N \leq \mathrm{P} \times 4\,\mathrm{mm/m} \frac{1}{\cos\alpha}$$

El caso peor es con $60°$ para el que $N = 8 \times 10^{-3} \cdot \mathrm{P}$. El mejor, $30°$, con $N = 4{,}62 \times 10^{-3} \cdot \mathrm{P}$. Adoptando el primer valor en todos los casos, se obtiene una regla conservadora pero cómoda, que en el peor de los casos sobrestima la cantidad de material necesario en un factor de 1,73. El área necesaria se obtiene simplemente dividiendo N por la tensión segura f.

La regla de diseño para arriostramientos en diagonal fabricados con acero corriente se resumen en:

El ángulo de la diagonal debe estar entre 30 y 60°, y en tal caso basta disponer un área que resista con seguridad 8 milésimas del peso que se desea estabilizar.

---

[4]Nótese que $\sin 2\alpha$ *no es una función monótona de* α, de ahí que la condición imponga *dos* límites, uno inferior y otro superior. La conclusión puede parecer contradictoria con la afirmación anterior de que el arriostramiento horizontal es el que requiere menos esfuerzo, pero no hay tal: aquí estamos diseñando arriostramientos *que se anclan en el suelo*, lo que es imposible con uno horizontal de longitud finita.

La regla se aplica a cada una de las diagonales de una cruz de San Andrés, puesto que no podemos prever de que lado caerá la imperfección inicial del soporte. Si existen varias diagonales y aunque el reparto exacto del trabajo entre ellas no es un asunto evidente (véase más adelante), basta con que entre todas cumplan la regla: la regla es conservadora. □

Ejemplo 2.2: Arriostramientos óptimos. *¿Cuál es el mejor arriostramiento en las condiciones del ejemplo anterior?* ▽

La cualidad 'mejor' es asunto de convenciones: por ejemplo, podría ser aquel que conduzca a un menor valor de δ. Pero en general (salvo que se disponga otra cosa) la solución mejor es aquella que con un mínimo de material resuelve el mismo problema. El volumen de material consumido en una diagonal es Ad. De las consideraciones del ejemplo anterior ese volumen puede expresarse como $\mathrm{A h}/\sin\alpha$, de manera que el problema consiste en obtener el valor de α que hace mínima la función $f(\alpha) = A/\sin\alpha$.

Desde el principio podemos prever que α está entre 30 y 60°, pues sólo entonces se aprovecha el material al máximo: $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{f}}$. Con eso y la ecuación (2.6) podemos escribir la función de interés como:

$$f(\alpha) = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{f}}\left(\frac{\eta_{\mathrm{tol}}}{\mathrm{h}} + \frac{\varepsilon_{\mathrm{f}}}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

El cálculo del valor óptimo de α puede obtenerse resolviendo la ecuación $df/d\alpha = 0$; pero puede ser más cómodo y más rápido dibujarla o tabularla para obtener el mínimo por simple inspección:

α (°)	30	35	40	45	50	55	60
$\frac{f(\alpha)}{\mathrm{P/f}}$ ($\times 10^{-3}$)	9,21	8,15	7,61	7,44	7,61	8,15	9,21

El valor óptimo es 45° y el volumen total necesario en una *diagonal es:*

$$V = 7,44 \times 10^{-3}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{f}}\mathrm{h}$$

El incremento sobre este valor en las soluciones 'peores' es de sólo un 24%; debemos concluir que no hay una solución significativamente mejor: hay libertad en el diseño (pero entre 30 y 60°).

Podría pensarse que poniendo una única pieza en diagonal podríamos disminuir la cantidad de material a la mitad. No es cierto. Una única diagonal tendría que traccionarse o comprimirse según el sentido del desplome. En la situación de compresión, la diagonal tendría que autoestabilizarse también a sí misma (cf. **§1.2.2***) y estaría penalizada por un factor ω que, si resulta ser mayor que 2, conduciría a mayor cantidad de material que* dos *cables. Puesto que la cantidad de material necesaria en los arriostramientos es muy pequeña, cabe esperar que una única diagonal sería muy esbelta y que, efectivamente, ω sería mayor que dos en casi todos los casos (salvo para pesos extraordinariamente grandes y alturas muy pequeñas que, por otra parte, se resolverán, probablemente, con piezas tan poco esbeltas que no necesitarían arriostramiento en absoluto.).* □

2.3 Arriostramiento de varios soportes

Consideremos un cuerpo indeformable sostenido por una serie de soportes. ¿Necesitamos arriostrar cada soporte individualmente? La clave está en que el desplazamiento del cuerpo obliga a desplomarse *simultáneamente a todos* los soportes, véase la figura 2.4. Esto ocurre siempre que no exista posibilidad de *desplazamiento relativo* entre el cuerpo y la cabeza de los soportes. Y eso casi siempre ocurre, con independencia del tipo de unión entre los soportes y el cuerpo: incluso si se trata de un simple apoyo por contacto, comprimido, el inevitablemente rozamiento asegura cierta capacidad de transmitir esfuerzos horizontales, suficientes para evitar el desplazamiento relativo de las superficies en contacto. (Recuérdese que los esfuerzos necesarios para asegurar la estabilidad son extraordinariamente pequeños, cf. los ejemplos 1.1 y 2.1; que las fuerzas de rozamiento sean suficientes sólo puede ponerse en duda si el número de soportes es extraordinariamente grande). Si uno de los vanos entre soportes está arriostrado con rigidez suficiente en relación al peso total, P, se alcanzará un situación de equilibrio con un cierto desplome que

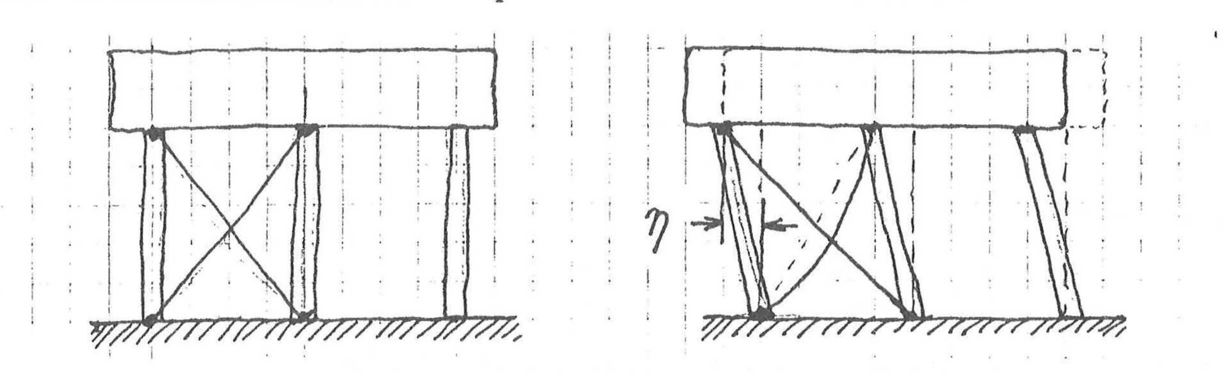


Figura 2.4: **Arriostramientos de varios soportes**

afectará a todos los soportes por igual: el arriostramiento estabiliza el conjunto (y no sólo al soporte al que está unido), a condición de que las cabezas de los soportes estén unidas (por el propio cuerpo indeformable o por estructura adicional capaz de transmitir pequeños esfuerzos horizontales).

A pesar de lo concluyente del argumento anterior, puede ser instructivo analizar en detalle cómo se organiza el equilibrio. Si la construcción fuera *perfecta* y su estabilidad estuviera asegurada, las solicitaciones N_i de los soportes se obtendrían, en función del peso P, con las mismas técnicas empleadas para cables verticales, véase la figura 2.5. La suma de sus componentes verticales tiene que ser desde luego igual al peso total P.

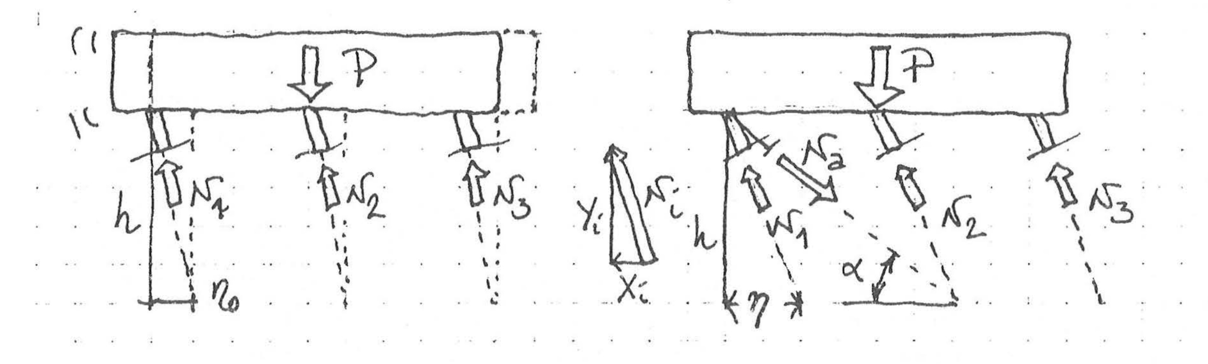


Figura 2.5: **Equilibrio de varios soportes con desplome**

Pero ya sabemos que la construcción perfecta es imposible. En la situación inicial (justo al poner la carga), con como mucho un desplome relativo pequeño, $\eta_{\text{tol}}/\text{h}$, las fuerzas N_i se desvían de la vertical en un ángulo que aproximadamente vale $\eta_{\text{tol}}/\text{h}$. Pero la suma de sus componentes verticales tiene que ser igual al peso si hay equilibrio vertical, $\sum Y_i = \text{P}$. Cada componente horizontal es igual a la vertical por la tangente del ángulo, y con ángulos pequeños se tendrá $\sum X_i \approx (\eta_{\text{tol}}/\text{h}) \sum Y_i$, de manera que la resultante horizontal total sobre el cuerpo es $(\eta_{\text{tol}}/\text{h})\text{P}$. Ésta es la perturbación que, de no encontrar oposición, desplaza el cuerpo y desploma los soportes.

Pero si existe un arriostramiento capaz, se alcanzará un posición de equilibrio con un desplome, η, mayor que el inicial, con un alargamiento suficiente en el arriostramiento como para contrarrestar la acción perturbadora del peso sobre una geometría imperfecta. El análisis del equilibrio debe incluir ahora la solicitación del arriostramiento, N_j. Si hay equilibrio vertical y η es pequeño:

$$\sum Y_i - N_j \sin \alpha \approx \text{P}$$

es decir que $\sum Y_i \approx \mathrm{P} + N_j \sin\alpha$. Para que exista equilibrio horizontal debe ser:

$$\sum X_i - N_j \cos\alpha \approx 0$$

que, al considerar la relación entre $\sum Y_i$ y $\sum X_i$ se transforma en:

$$\sum X_i - N_j \cos\alpha = \frac{\eta}{\mathrm{h}} \sum Y_i - N_j \cos\alpha = \frac{\eta}{\mathrm{h}}\mathrm{P} + \left(\frac{\eta}{\mathrm{h}} \sin\alpha - \cos\alpha\right) \cdot N_j \approx 0$$

de donde se obtiene el valor necesario de N_j para asegurar el equilibrio:[5]

$$N_j \approx \mathrm{P} \cdot \frac{\eta}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha - \frac{\eta}{\mathrm{h}} \sin\alpha}$$

Puesto que el valor de η/h está limitado a un valor pequeño por la tolerancia de fabricación y el requisito de rigidez (debe permanecer menor que $(\eta_{\mathrm{tol}} + \delta_{\mathrm{tol}})/\mathrm{h}$), para los ángulos recomendables ($\alpha \leq 60°$) puede despreciarse $(\eta/\mathrm{h})\sin\alpha$ frente a $\cos\alpha$.[6] Y la solicitación de tracción en el cable vuelve a relacionarse con el peso en la forma conocida:

$$N_j \approx \mathrm{P}\frac{\eta}{\mathrm{h}}\frac{1}{\cos\alpha}$$

Si hay más de un arriostramiento, entre todos deben contrarrestar la acción perturbadora del peso total:

$$\sum N_j \cdot \cos\alpha_j \approx \mathrm{P}\frac{\eta}{\mathrm{h}} \tag{2.7}$$

Esta ecuación no determina un *único* reparto del trabajo entre cada uno de los arriostramientos. Por el contrario, muestra que existen muchas combinaciones posibles para los valores de N_j, capaces todas de asegurar el equilibrio. Además de la condición anterior, no debe olvidarse que la ampliación del desplome, δ, es *única*, que todos los arriostramientos se alargan al unísono y que por tanto sus deformaciones están ligadas: para cualquiera de las diagonales dispuestas debe ocurrir que $\delta = \eta - \eta_{\mathrm{tol}} = \Delta_j / \cos\alpha_j$. Si, como casi siempre pasa, las diagonales pueden tener distinta longitud pero cubren la misma altura, la condición anterior se puede escribir como $\delta = \varepsilon_j \mathrm{h}/(\sin\alpha\cos\alpha)$ que indica que la deformación de las diagonales *no puede* ser igual para todas si la inclinación varía. Si como es deseable se quiere que todos los arriostramientos aprovechen al máximo el material ($\varepsilon_j = \varepsilon_{\mathrm{f}}, \forall j$), la conclusión es clara: todas las diagonales deben tener idéntica inclinación respecto a la horizontal, condición que en edificios reales no es siempre posible o deseable cumplir (debido generalmente a razones no estructurales).

Comprobación de arriostramientos

Para la comprobación de diseños con varios arriostramientos, la ecuación (2.7) puede rescribirse adoptando como única incógnita el desplazamiento necesario para alcanzar la posición de equilibrio, δ. Para ello, según las reglas del método universal (véase $\mathcal{ESD}$:31), deben expresarse las solicitaciones en los arriostramientos en función de esa incógnita con $N_j = k_j \Delta_j$ y $\Delta_j = \delta \cos\alpha_j$:

$$\sum N_j \cdot \cos\alpha_j = \delta \sum k_j \cdot \cos^2\alpha_j = \mathrm{P}\frac{\eta_0 + \delta}{\mathrm{h}}$$

[5]Puede comprobarse también que en esas condiciones hay equilibrio de momentos, tarea que como ejercicio queda para usted.

[6]Se trata de una aproximación excelente si $\alpha < 60°$, pero del lado de la inseguridad, puesto que subestima el valor de N_j. Para ángulos mayores que 60° (y sobre todo cercanos a 90°) debe mantenerse ese término, e incluso acudir a un análisis de orden superior.

que permite, una vez dimensionados los arriostramientos (y determinada su rigidez, $k_j = \mathrm{E}A_j/d_j$), determinar la posición de equilibrio:

$$\delta = \eta_0 \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{h} \sum k_j \cos^2 \alpha_j - \mathrm{P}} = \eta_0 \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P_{cr}} - \mathrm{P}} \qquad (2.8)$$

donde la carga crítica de la estructura es ahora $\mathrm{P_{cr}} = \mathrm{h} \sum k_j \cos^2 \alpha_j$.

Para comprobar la seguridad de cada diagonal basta con calcular su deformación de trabajo y comprobar que no supera la deformación segura del material.[7] Para ello podemos calcular la solicitación en cada diagonal:

$$N_j = k_j \Delta_j = k_j \cos \alpha_j \cdot \delta = \eta_0 \cdot k_j \cos \alpha_j \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P_{cr}} - \mathrm{P}}$$

Vemos que la solicitación será tanto menor cuando mayor sea la carga crítica o, lo que es lo mismo, cuanto mayor sea la rigidez ponderada del conjunto de arriostramientos. Dentro de eso, los arriostramientos con mayor rigidez frente a δ (es decir con mayor $k_j \cos \alpha_j$) habrán de soportar mayor fracción del esfuerzo de compensación total.

Finalmente, para comprobar que se cumple el requisito de rigidez basta con comprobar que $\delta \leq \delta_{\mathrm{tol}}$.

Diseño de arriostramientos

Las ecuaciones anteriores, sin embargo, siguen sin resolver el problema del *diseño*, es decir, cómo determinar una combinación de áreas en las diagonales sin necesidad de un penoso ciclo de prueba y error. Según la expresión de la carga crítica, la aportación de cada diagonal depende de su inclinación: a igualdad de área, las diagonales con menor pendiente contribuyen más a la estabilidad general, aunque también requieren mayor cantidad de material por ser más largas. Para clarificar la cuestión podemos expresar la carga crítica en función del volumen de material de cada diagonal, $V_j = A_j d_j$; teniendo en cuenta que $d_j = \mathrm{h}/\sin \alpha$:

$$\mathrm{P_{cr}} = \mathrm{h} \sum \frac{EA_j}{d_j} \cos^2 \alpha_j = \mathrm{h} \sum \frac{EV_j}{d_j^2} \cos^2 \alpha_j = \frac{1}{\mathrm{h}} \sum EV_j \sin^2 \alpha_j \cos^2 \alpha_j$$

Ya se ve que a igualdad de volumen, la aportación a la estabilidad de cada diagonal es máxima cuando lo es $\sin \alpha_j \cos \alpha_j$, es decir, cuando $\alpha = 45°$, una conclusión que no puede sorprender a estas alturas (cf. el ejemplo 2.2). De todas formas, la función $\sin \alpha \cos \alpha$ varía apenas un 15% en el intervalo entre 30 y 60°, lo que supone variaciones del 33% en la rigidez aportada, de manera que basta mantener las diagonales en esas inclinaciones como para que el diseño sea eficaz. Por tanto, con *estas* condiciones, pueden dimensionarse todas con la regla de diseño para un único arriostramiento (cf. el ejemplo 2.1), aprovechando razonablemente el material. Para ello puede utilizarse un reparto arbitrario del peso total P entre ellas. Otra regla, más cómoda, consiste en calcular el volumen necesario en una única diagonal y repartirlo arbitrariamente entre todas las que se quiera disponer. Debido a las hipótesis utilizadas convendrá siempre comprobar el funcionamiento real del diseño resultante con (2.8) (pero téngase en cuenta lo indicado en la nota 7).

[7] Aquí se puede afinar un poco más si de lo que se trata es de peritar una estructura construida: el criterio estricto de seguridad sólo exige que los arriostramientos garanticen la estabilidad para un peso total $\gamma\mathrm{P}$, lo que en general resulta compatible con deformaciones bajo P ligeramente mayores que la segura del material, véase $\mathcal{ESD}$:33, nota 22. La comprobación estricta sólo exige que con un peso $\gamma\mathrm{P}$, en ninguna de las diagonales la deformación haya superado la de rotura, y para realizarla hay que acudir al análisis del equilibrio antes de la rotura de las diagonales, véase $\mathcal{ESD}$:28.

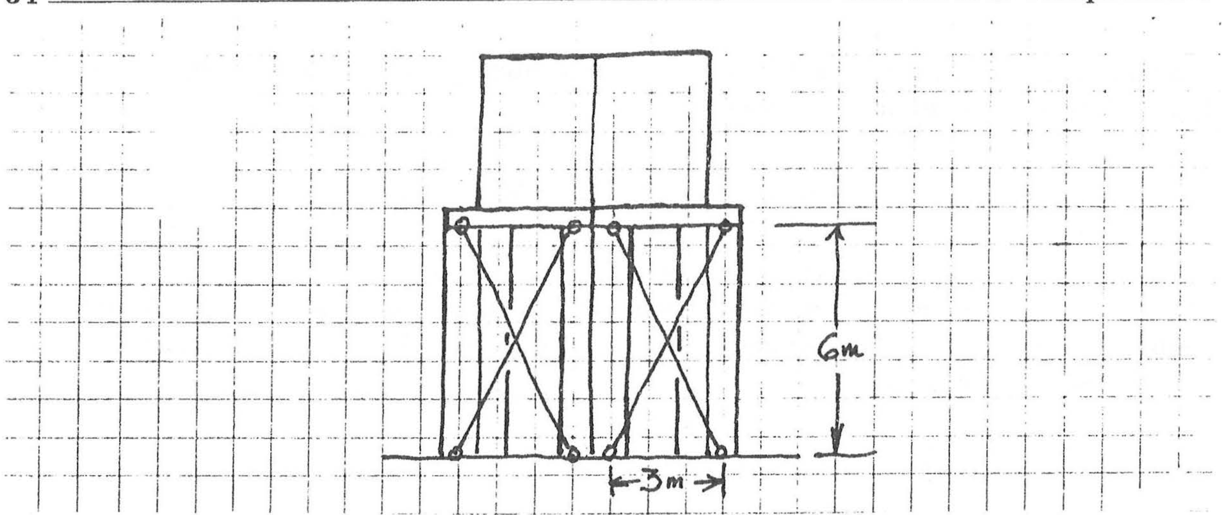


Figura 2.6: **Depósito arriostrado**

Ejemplo 2.3: Diseño de los arriostramientos de un depósito. *Diseñar los arriostramientos del depósito de la figura 2.6 a fin de asegurar su estabilidad. A efectos del análisis se puede suponer que el propio depósito y la plataforma sobre la que descansa son indeformables. La única acción es el peso del depósito de 1,2 MN (despreciándose el peso propio del resto de los elementos). La tolerancia de fabricación relativa a la altura se fija en 2 mm/m. El desplazamiento tolerable relativo a la altura (o distorsión tolerable) se fija en 2 mm/m. El acero a utilizar como varillas en los arriostramientos tiene las siguientes características:* f = 180 N/mm², σ_u = 260 N/mm², E = 210 kN/mm². *Este acero se encuentra en varillas de* 1, 2, 3, ... mm *de diámetro.* ▽

El ángulo que forman las diagonales con la horizontal es de 63°, de manera que la regla de diseño del ejemplo 2.1 no es estrictamente aplicable. Pero podemos aprovecharnos de ella para al menos estimar el orden de magnitud del resultado que obtendremos con un análisis más apropiado. Según esa regla necesitamos en cada plano varillas que entre todas *resistan con seguridad ocho milésimas del peso total. Como hay dos varillas oponiéndose a cada sentido del desplome, cada varilla debe resistir* $4 \times 10^{-3} \cdot$ 1,2 MN = 4,8 kN, *lo que corresponde a* 4,8 kN ÷ 0,18 kN/mm² = 27 mm², *es decir, varillas de* 6 mm *de diámetro.*

Para un análisis detallado y puesto que la longitud del arriostramiento está decidida de antemano, 6.708 mm, *calculamos con (2.5) la máxima deformación compatible con el requisito de rigidez:*

$$\varepsilon \leq 2\,\text{mm/m} \times \frac{6.000\,\text{mm}}{6.708\,\text{mm}} \times \cos 63^\circ = 0{,}80\,\text{mm/m}$$

Puesto que este límite es menor que la deformación segura del material, 0,86 mm/m, *el requisito de rigidez rige el diseño y podemos operar con él y cumplimos simultáneamente el requisito de resistencia. La tensión admisible en este caso resulta, por tanto, ser* 0,80 mm/m × 210 kN/mm² = 168 N/mm².

La solicitación en cada una *de las dos varillas 'activas' la deducimos de (2.1) puesto que* $\eta/\text{h} \leq (\eta_{\text{tol}} + \delta_{\text{tol}})/\text{h}$*:*

$$N \approx 0{,}6\,\text{MN} \times 4\,\text{mm/m} \times \frac{1}{\cos 63^\circ} = 5{,}37\,\text{kN}$$

y por tanto cada varilla deberá dimensionarse con una área de 5,37 kN ÷ 0,168 kN/mm² = 32 mm², *lo que corresponde a un diámetro comercial de* 7 mm, *con una sección de* 38,5 mm², *un* 20% *más que la estrictamente necesaria. El resultado concuerda con el de la regla para arriostramientos con inclinación menor que* 60°. □

Ejemplo 2.4: Peritaje de la estabilidad de un depósito. *El depósito del ejemplo anterior se construye según las especificaciones, pero finalmente se observa que el desplome inicial de los soportes resulta ser de* 21 mm, *superior a la tolerancia de fabricación prevista. Se trata de determinar si es posible usar el depósito de todas formas con seguridad suficiente y evitar así desmontarlo.* ▽

Para predecir cómo se comportará la estructura si es cargada en las condiciones previstas, lo primero es determinar su carga crítica para poder determinar su posición de equilibrio. El área de cada varilla es $\pi \times (7\,\text{mm})^2/4$ = 38,5 mm², *su rigidez es* 210 kN/mm² × 38,5 mm²/6.708 mm = 1,20 kN/ mm. *Para calcular la carga crítica de las* dos varillas *simplemente hay que sumar sus rigideces ponderando con su*

inclinación: $2 \times 1{,}20\,\text{kN/mm} \times 6.000\,\text{mm} \times (\cos 63^\circ)^2 = 2{,}89\,\text{MN}$, *sólo* 2,41 *veces mayor que la carga prevista de* 1,2 MN. *Mediante (2.3) podemos calcular el desplome total que se produciría:*

$$\eta = 21\,\text{mm} \times \frac{2{,}89\,\text{MN}}{2{,}89\,\text{MN} - 1{,}20\,\text{MN}} = 36\,\text{mm}$$

y la imperfección inicial no llega a doblarse. ¿En qué condiciones se encontrarían las varillas? Su deformación vendrá dada según (2.5) por:

$$\varepsilon = \frac{36\,\text{mm} - 21\,\text{mm}}{6\,\text{m}} \frac{6\,\text{m}}{6{,}708\,\text{m}} \cos 63^\circ = 1{,}02\,\text{mm/m}$$

mayor que la segura, pero menor que la elástica ($\varepsilon_e = 260\,\text{N/mm}^2 \div 210\,\text{kN/mm}^2 = 1{,}24\,\text{mm}$)*: el arriostramiento no se rompería y de hecho habría posibilidad de equilibrio, pero con menor seguridad que la prevista. La conclusión es que resulta inevitable* actuar *sobre la estructura o sobre sus condiciones de uso.*

Una alternativa es dejarlo todo como está y simplemente renunciar a llenar completamente el depósito. El límite hay que fijarlo de manera que las varillas de 7 mm *sigan siendo seguras. Con una deformación segura de* 0,86 mm/m, *la máxima ampliación del desplome que podemos permitir es de* $0{,}86\,\text{mm/m} \times 6{,}708\,\text{m}/\cos 63^\circ = 12{,}9\,\text{mm}$, *lo que corresponde a un desplome total de* 33,9 mm. *Con (2.3) podemos escribir una ecuación que determina la máxima carga nominal P' que puede resistirse dada la carga crítica de la estructura:*

$$33{,}9\,\text{mm} = 21\,\text{mm} \frac{2{,}89\,\text{MN}}{2{,}89\,\text{MN} - P'}$$

de la que obtenemos $P' \leq 1{,}10\,\text{MN}$, *sólo un poco más pequeña que la carga prevista. Con esta nueva carga nominal tenemos una estructura segura pero que de todas formas no cumple* estrictamente *el requisito* convencional *de rigidez. En efecto, la ampliación del desplome en relación a la luz arroja un valor de distorsión de* $12{,}9\,\text{mm}/6\,\text{m} = 2{,}15\,\text{mm/m}$, *superior a la tolerable de* 2 mm/m. *Para tomar aquí una decisión sensata hay que reflexionar sobre el carácter* cualitativo *de muchos requisitos que, sólo por comodidad, se expresan* cuantitativamente.

El requisito de rigidez, en particular, se establece para que durante el uso de la estructura está no cambie de forma hasta tal punto que se torne irreconocible, y para que en su deformación no rompa elementos estructurales más frágiles que ella. (También es necesario para la validez del análisis simple que estamos manejando.) La primera condición se sigue cumpliendo con el nuevo valor de P', a pesar de superarse el límite del requisito de rigidez. Si además no hay otros elementos involucrados por esos movimientos, podría aceptarse la solución de llenar sólo el depósito hasta 1,1 MN. *Pero hay que asegurarse de que así sea abriendo un aliviadero a la altura conveniente para que efectivamente* no se pueda *llenar el depósito por encima del nivel acordado.*

Siguiendo argumentos parecidos podría incluso proponerse no hacer nada en absoluto: el diseño realmente fabricado tiene una seguridad algo menor que la prevista y es un poco más flexible que lo tolerable, pero si las partes implicadas llegan a comprender estos hechos y aceptarlos, ¿dónde está el problema? □

2.4 Soportes inclinados

Hasta aquí hemos examinado cómo estabilizar un soporte vertical, o mejor, un soporte alineado con la carga que ha de soportar. Para ello, desde §**1.1**, hemos ido introduciendo sucesivamente, los conceptos de desplome, imperfección inicial y ampliación del desplome, junto a una línea argumental que nos permitiera asegurar la estabilidad del soporte mediante un correcto diseño de los arriostramientos y de la propia pieza. Todos estos conceptos son básicos y útiles en el análisis de situaciones que, como la del soporte alineado con la carga, tienen un cierto sabor a cosa perfecta, llena de coincidencias. Para concluir esta primera excursión por la estabilidad de la estructuras conviene examinar todos los conceptos y argumentos anteriores en estructuras en que esas coincidencias han desaparecido por completo.

Consideremos el soporte inclinado o jabalcón de la figura 2.7, sometido a la acción de un peso en su cabeza, y articulado por su pie al suelo. Desde el principio no cabe ninguna duda de que sin el tirante no hay equilibrio posible: la pieza giraría en su pie y acabaría por reposar

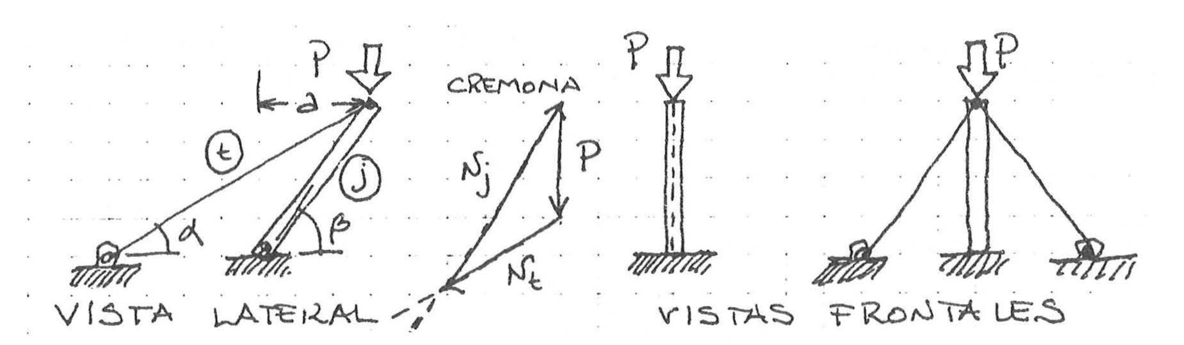


Figura 2.7: **Soporte inclinado**

en el suelo. Para analizar esta situación, curiosamente, podemos partir de la geometría inicial (previa a la carga) y obtendremos resultados sin tener que considerar ni imperfecciones iniciales ni ampliaciones subsiguientes. El simple equilibrio estático en la cabeza del soporte nos permite escribir dos ecuaciones en función de las solicitaciones del jabalcón, N_j, y del tirante, N_t:

$$N_t \cos\alpha - N_j \cos\beta \approx 0$$

$$P + N_t \sin\alpha - N_j \sin\beta \approx 0$$

de la que podemos obtener los valores de ambas solicitaciones:

$$N_j \approx P \frac{1}{\sin\beta - \cos\beta \tan\alpha}$$

$$N_t \approx P \frac{1}{\cos\alpha \tan\beta - \sin\alpha}$$

Por supuesto se trata de una aproximación correcta bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños, que permite conjeturar que la posición de equilibrio será casi indistinguible de la geometría inicial (lo que ocurrirá si se cumple con el requisito de rigidez). En el plano de esta estructura, incluso en la geometría inicial hay un efecto desestabilizador: el momento del peso respecto al pie de la pieza. Es por esto que no tenemos que hacer suposiciones suplementarias acerca de imperfecciones iniciales, porque incluso sin ellas hay 'algo' a lo que el tirante debe oponerse.

De hecho, la excentricidad a del peso respecto al pie del soporte puede verse como una 'imperfección'... del diseño, que fuerza a que el peso no sea equilibrado por la reacción en el suelo a través de la senda que sería 'más espontánea': la vertical del peso. (Al no tratarse de una imperfección geométrica, en el sentido que hemos venido manejando, no viene al caso hablar de tolerancia de fabricación. De hecho, este diseño también será imperfecto y podría analizarse con geometrías imperfectas derivadas de emplear $a \pm \eta_{\text{tol}}$ en vez de la dimensión *nominal* a; sin embargo tales cálculos no arrojarían ninguna *diferencia* significativa en este caso.)

Pero miremos la estructura en un plano ortogonal al anterior: de nuevo nos encontramos con alineaciones 'sospechosas' en las que aparece el mismo dilema que en §**1.1**: si suponemos que la construcción es perfecta *parece* que el equilibrio es posible (de hecho se trata del mismo equilibrio que representan las ecuaciones anteriores); pero si consideramos un cierto desplome inicial, tras cargar la estructura, vemos claramente la posibilidad de un desplome lateral (y la consiguiente necesidad de disponer arriostramientos para evitarlo, igual que si se tratara de una pieza vertical).

La diferencia de situación entre ambos planos puede entenderse en términos de desplazamientos y fuerzas. En el primer plano, el de la estructura, la cabeza del soporte puede moverse

de dos formas básicas: horizontal y verticalmente. Y en ambas direcciones pueden actuar, si es necesario, fuerzas interiores, de manera que la estructura tiene a su alcance (tras un desplazamiento) *una posibilidad* de encontrar el equilibrio. Por nuestra parte, ni siquiera tenemos necesidad de considerar imperfecciones o ampliaciones, puesto que la única acción exterior ya demanda, por sí sola, la aparición de solicitaciones según dos ejes ortogonales.

En el segundo plano, seguimos teniendo dos posibilidades de desplazamiento, pero en principio las fuerzas posibles sólo pueden actuar en sentido vertical, de manera que no hay nada que se oponga al desplazamiento horizontal: de ahí la necesidad de disponer arriostramientos y de considerar que el equilibrio requiera un cierto desplome. Una vez puestos los arriostramientos, sin embargo, y al revés que en la situación anterior, la única acción sigue sin demandar solicitaciones horizontales, de manera que con la geometría inicial no podemos decir nada acerca de los arriostramientos dispuestos. Para romper el 'embrujo' tenemos que perturbar la perfección del sistema, suponiendo que razonablemente existirán imperfecciones incluso antes de la entrada en carga.[8]

2.5 Orden de los efectos de las acciones sobre las estructuras

El panorama, en resumen, es el siguiente: las acciones presentan dos tipos de efectos sobre las estructuras. De una parte, aquellos que pueden derivarse incluso operando con la geometría inicial (sin deformar), denominados en jerga *de primer orden*. Se trata de las solicitaciones N_t y N_j calculadas en el ejemplo de la figura 2.7 (o de las deformaciones y alargamientos correspondientes). De otra parte, tenemos aquellos efectos que sólo aparecen al realizar un análisis más cuidadoso sobre la geometría de equilibrio, y que en general se añaden a los efectos de primer orden. Por ello se llaman *efectos de segundo orden*. En principio no se trata de efectos 'más pequeños', sino de efectos más 'ocultos'. En las estructuras convencionales de edificación suele cumplirse lo siguiente: si existe (no es nulo) un efecto de primer orden en un punto y dirección de la estructura, y la estructura es aceptablemente rígida y segura respecto de ese efecto, el efecto de segundo orden es despreciable frente al primero;[9] pero si no existe (es nulo) un efecto de primer orden, resultará *imprescindible* analizar la estabilidad de la estructura respecto del desplazamiento correspondiente, incluso perturbándola si es necesario. En consecuencia, una actitud prudente consiste en suponer que existirá tensión *de segundo orden* siempre que el análisis sobre la geometría original nos diga que no hay tensión en absoluto.[10] La estructura de la figura 2.7 es un simple ejemplo de esta afirmación: de los tres desplazamientos en el espacio de la cabeza de la pieza, los dos contenidos en el plano de la estructura están asociados a efectos de primer orden y no necesitan un análisis pormenorizado de su estabilidad; solo el desplazamiento restante (sin efectos de primer orden asociados a él) lo requiere.

En general, sobre las estructuras de edificación existe una diversidad suficiente de acciones como para que globalmente existan efectos de primer orden asociados a todos los desplazamientos del esquema estructural. Por ejemplo, la estructura necesaria para resistir acciones

[8] Qué ambos planos no pueden tratarse del mismo modo se ve reflexionando sobre el hecho de cualquier cantidad, por pequeña que sea, *hace una diferencia significativa* comparada con 'nada':

> —¿Cuántas veces has ido a New York?
> —No me acuerdo la verdad, como siete u ocho... ¿Y tú?
> —Pues, verás, tampoco lo recuerdo, como cero o una...

[9] Imaginemos un depósito con varios desagües a igual profundidad, en los que el diámetro de uno es la décima parte del anterior. Si se trata de calcular la velocidad con que el depósito se vacia, basta considerar el desagüe mayor, pues el caudal del siguiente sólo representa una centésima del primero...

[10] ... pero si se tapa el desagüe grande, la pérdida de agua estará regida por el siguiente, cuyo caudal representará entonces el 99% del total. (Debo este brillante ejemplo y el chiste anterior al profesor José Luis de Miguel.)

horizontales, como la del viento, demandan de por sí, *en primer orden*, arriostramientos más gruesos que los necesarios para la estabilidad, de manera que este análisis poca veces es necesario en edificios convencionales.[11] Localmente sin embargo existen múltiples desplazamientos que requieren el análisis de la estabilidad, siendo el pandeo de piezas comprimidas el caso más tópico y más considerado por analistas y diseñadores. Estos efectos locales están recogidos por las diversas regulaciones administrativas de manera que resulta difícil que su *probable* existencia pase desapercibida.

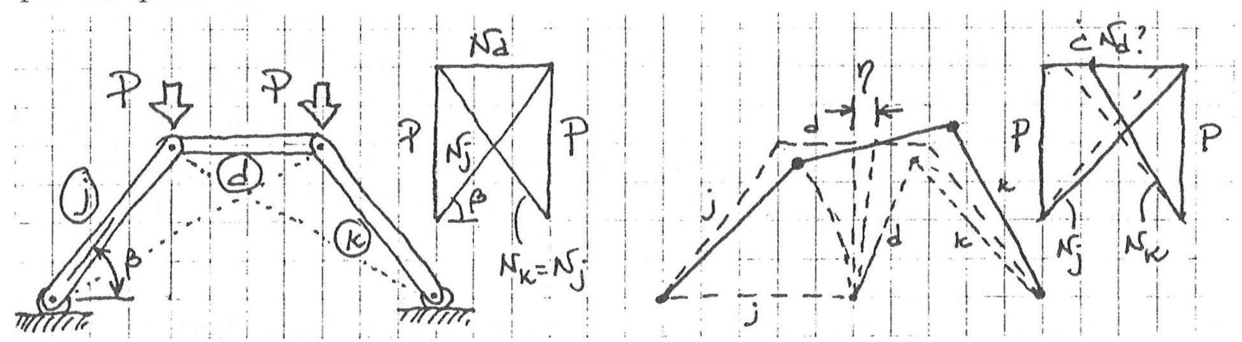


Figura 2.8: **Arco inestable**

El problema para el diseñador está en aquellos efectos de segundo orden (asociados a tensiones nulas de primer orden) que pudieran estar 'ocultos' en un esquema estructural concreto y cuyo análisis no quede cubierto en las dos categorías anteriores. Como ejemplo, consideremos la estructura de la figura 2.8, obtenida por transformaciones geométricas evidentes a partir de la figura 2.7. Sometida a las acciones indicadas, y planteando ecuaciones de equilibrio estático es fácil llegar a la conclusión de que la solicitación en los jabalcones es $P/\sin\beta$ y que en el dintel es $P/\tan\beta$, ambas compresiones. Puesto que las acciones demandan solicitaciones en todos los elementos de la estructura, podríamos contentarnos con un análisis de primer orden para obtener un diseño resistente y rígido. Sin embargo, esta estructura presenta un fuerte efecto de segundo orden que no estaría contemplado por un análisis semejante.

Consideremos que existieran imperfecciones iniciales de manera que en la geometría real, los jabalcones hubieran rotado *ambos* en dirección de las agujas de un reloj respecto a sus respectivos pies, mientras que el dintel lo hubiera hecho en sentido contrario respecto a su centro. La composición geométrica es perfectamente posible tal y como se muestra a la derecha de la figura. El efecto neto es el de un desplazamiento horizontal del dintel, junto a su giro, que se traduce en un desplome de su centro respecto de su vertical.[12] En esa situación el análisis del equilibrio bajo las cargas en los nudos revela que, según consideremos el extremo izquierdo o el derecho del dintel, su solicitación es menor o mayor que el valor obtenido previamente, mostrando que el equilibrio es en realidad imposible. Una razón quizá más evidente es que ese movimiento es posible incluso sin carga: la energía potencial del sistema permanece constante: técnicamente se trata de un equilibrio indiferente y no de un equilibrio estable (que exige una posición de energía *mínima*. Esta estructura mostraría (sin arriostramiento adicional) tendencia a desplomarse, ampliando sus imperfecciones iniciales. (Al caer el conjunto al suelo, basta considerar el peso

[11] Puede resultar deprimente que tras 38 páginas estudiando cómo diseñar arriostramientos para la estabilidad, diga ahora que casi nunca es necesario hacer tales cálculos. Pero así es. En todo caso, usted sabe *ahora qué* es la inestabilidad y ese era mi principal objetivo. Además, a través de los ejemplos, espero haber mostrado lo esencial de las técnicas del diseño de estructuras, y ese conocimiento sí que será útil en una amplia variedad de otros contextos habituales.

[12] Nótese que el desplazamiento horizontal del dintel sin giro demandaría tensión y deformación en los jabalcones, pues mientras que uno se alargaría el otro tendría que acortarse: se trata de un efecto de primer orden con tensiones no nulas y bien definidas. Sin embargo, el propio dintel no se deformaría en absoluto y tendría tensión nula: lo que debería darnos pie para empezar a desconfiar...

propio de las barras para percatarse de que el centro de gravedad del conjunto está más bajo, tras caer el jabalcón izquierdo al suelo, que en la posición inicial.) Para asegurar su estabilidad será necesario el diseño de un arriostramiento aceptablemente seguro y rígido, tras un análisis en el que imperfecciones iniciales y ampliaciones del desplome tendrán que jugar el mismo papel que en las páginas anteriores.

Un arriostramiento apropiado consistiría en disponer cables según las dos diagonales del trapecio que la estructura forma con el suelo. El análisis del equilibrio *en la geometría inicial* no otorga solicitación a ninguna de ellas. De acuerdo con la regla prudente dada antes, esto *no significa* que puedan suprimirse: por el contrario obliga a un análisis más detallado para determinar su solicitación.

Recuérdese que la estructura de la figura 2.8 es inestable porque está comprimida: bastaría 'poner todo patas arriba', cambiando el arriba y el abajo, pero sin alterar el sentido de los pesos, para obtener una estructura traccionada que, incluso perturbada o con imperfecciones iniciales, acabaría (sin ayuda) por adoptar la 'perfecta' forma de su esquema estructural. Tal es la asimetría que en la naturaleza guardan la tracción y la compresión.

CUADERNO

10.01